Soluciones de Examen de la Etapa Semifinal Estatal de la 38ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2024

1. Primera forma: Hagamos la lista de las posiciones:

$$(1,19),(2,16),(3,13),(4,10),(5,7),(6,4),(7,1),(8,20),(9,17),(10,14),(11,11).$$

Segunda forma. Buscamos la menor a tal que $-3a \equiv a \pmod{22}$, es decir el menor entero positivo a tal que $4a$ sea múltiplo de 22, de donde $a = 11$.

2. Tenemos que $b^2 - 1620 = 18a$, así que $900 < b^2 - 1620 < 1800$, de donde $2520 < b^2 < 3420$. Entonces $50 < b < 60$. Además, 1620 es múltiplo de 18 y también lo es $18a$, así que b^2 es múltiplo de 18, lo cual nos dice que b es múltiplo de 6. Entonces $b = 54$ y $a = \dfrac{54^2 - 1620}{18} = 72$.

3. Lo único que importa es la separación entre las bolitas azules, de manera que el problema es equivalente a contar de cuántas maneras se puede sumar 12 con tres enteros positivos. Las formas son: $(1,1,10)$, $(1,2,9)$, $(1,3,8)$, $(1,4,7)$, $(1,5,6)$, $(2,2,8)$, $(2,3,7)$, $(2,4,6)$, $(2,5,5)$, $(3,3,6)$, $(3,4,5)$ y $(4,4,4)$.

4. Los 4 vértices unidos a A forman un cuadrado $CDEF$ de lado 1, de manera que, por el teorema de Pitágoras, su diagonal CE mide $\sqrt{2}$. Sea M el punto medio de esta diagonal. Entonces AMC es un triángulo rectángulo con hipotenusa AC de lado 1 y cateto CM de lado $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Otra vez, usando el teorema de Pitágoras tenemos que

$$|AM|^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

de donde

$$|AM| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Por simetría ya podemos calcular la distancia de A a B y ésta es

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

5. Sea a el valor en la casilla a la izquierda de n y sea b el valor en la casilla a la derecha de n. Entonces los valores en el renglón de en medio son an y bn y $720 = abn^2$, de manera que n^2 es un factor de 720. Como $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$, entonces n puede ser $1, 2, 3, 4, 6, 12$.

6. Digamos que C es la suma de los vértices de cada cuadrado, y que T es la suma de los vértices de cada triángulo. Llamemos a al número asignado al otro vértice en el cuadrado que tiene los números 5, 20 y 10 (también vértice del triángulo con los números 10 y 9). Entonces $C = 20 + 10 + 5 + a = 35 + a$ y $T = 10 + 9 + a = 19 + a$. Como cada vértice del sólido pertenece a dos triángulos y a dos cuadrados, tenemos que

$$\frac{8T}{2} = \frac{6C}{2}.$$

Entonces $8\,(19 + a) = 6\,(35 + a)$, de donde $76 + 4a = 105 + 3a$ y así $a = 29$, $C = 64$ y $T = 48$. De aquí fácilmente podemos completar los vértices de la parte de arriba de la figura hasta encontrar que $x = 22$. La asignación completa se muestra en la figura a la derecha.