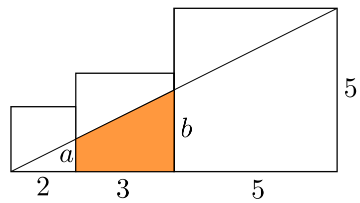
Soluciones de Examen de la Etapa Semifinal Estatal de la 37ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2023

Solución. 1. Llamemos a y b a los lados verticales del trapecio. Por semejanza de triángulos tenemos que

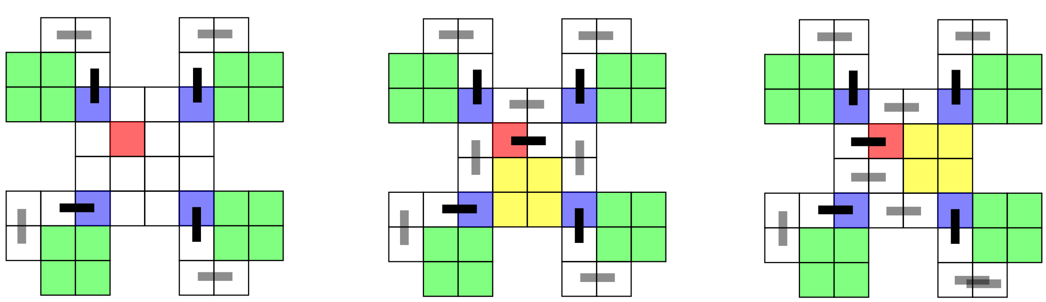
$$\frac{a}{2} = \frac{b}{2+3} = \frac{5}{2+3+5},$$



La última fracción es $1/2$, así que $a = 1$ y $b = 5/2$. El área del trapecio es

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left(1 + \frac{5}{2}\right) = \frac{21}{4}.$$

Solución. 2. Primero notamos que los 4 cuadritos en las esquinas del cuadrado central de 4×4 (marcados con morado en la figura abajo) deben cubrirse con fichas de 2×1 que solo abarquen ese cuadro dentro del cuadrado de 4×4, puesto que, de otra forma, hacia afuera quedarían 7 cuadraditos y 7 es número impar. En cada uno de esos cuadritos hay 2 posibilidades para colocar la ficha y esto nos da $2^4 = 16$ posibilidades. Una vez elegida la posición de esas fichas, algunas fichas en la parte de afuera deben colocarse forzosamente de cierta manera (marcadas con línea gris en el ejemplo abajo a la izquierda) y cada una de las figuras de las orillas tiene 2 formas de cubrirse (dependiendo cómo se pongan las fichas en los cuadrados de 2×2 marcados con verde en la figura). Hasta aquí llevamos 2^8 posibilidades. Ahora fijémonos en las posibilidades para cubrir el cuadrito rojo de la figura. Si se cubre hacia adentro del cuadro de 2×2 central (2 posibilidades), entonces queda solo por escoger cómo se cubre el cuadrado de 2×2 que queda completo sin cubrir (2 formas), así que en este caso serían 4 formas; si se cubre hacia afuera igualmente hay 2 posibilidades y otras 2 para completar. En total, el número de formas de cubrir la figura es $2^8(4+4) = 2^{11} = 2048$ posibilidades.



Solución. 3. Entre los 6 números consecutivos, hay 3 pares y, al menos, un múltiplo de 5, de manera que $b = 0$. Entonces, a, c y d son los números 1, 2 y 3, en algún orden. También, entre los 6 números consecutivos, debe haber dos múltiplos de 3, así que n es múltiplo de 9 y, por lo tanto, también lo es la suma de sus dígitos, es decir,

$$2a + 4b + 2c + 4d = 2(a + 2 \cdot 0 + c + 2d)$$

es múltiplo de 9, de donde también lo es $a+c+2d$. Pero este número es, a lo más, $1+2+2\cdot 3 = 9$, así que la única posibilidad es $\{a, c\} = \{1, 2\}$ y $d = 3$. Ahora, también el número es múltiplo de 16 pues forzosamente al menos uno de los 6 números es múltiplo de 4 y otros dos son múltiplos de 2; entonces también debe serlo el número formado por las últimas cuatro cifras de n. Las posiblidades para este número son: 3100 (con $a = 1$) o 3200 (con $a = 2$). El primero no es múltiplo de 16, de manera que $a = 2$ y $c = 1$.

Solución. 4. El número total de cuartetas es $\binom{8}{4} = 70$, así que la suma faltante aparece $70-(30+30+5) = 5$ veces. Es claro que no todas las tarjetas pueden tener el mismo número. Digamos que los números de las tarjetas son a y b. Veamos que alguno de a o b aparece 5 veces y el otra 3. Si no, y uno, digamos a, apareciera 7 veces, entonces la suma $a + a + a + a$ aparecería $\binom{7}{4} = 35$ veces. Si a apareciera 6 veces, entonces la suma $a + a + a + a$ aparecería $\binom{6}{4} = 15$ veces. Si ambos a y b aparecieran 4 veces, entonces la suma $a + a + a + b$ aparecería $\binom{4}{3}\binom{4}{1} = 16$ veces.

Entonces uno de los números aparece 5 veces, digamos a, y el otro, b, aparece 3 veces. Las cuartetas posibles son:

$$\begin{aligned}
&(a, a, a, a),\ \tbinom{5}{4} = 5 \text{ veces},\\
&(a, a, a, b),\ \tbinom{5}{3}\tbinom{3}{1} = 30 \text{ veces},\\
&(a, a, b, b),\ \tbinom{5}{2}\tbinom{3}{2} = 30 \text{ veces},\\
&(a, b, b, b),\ \tbinom{5}{1}\tbinom{3}{3} = 5 \text{ veces}.
\end{aligned}$$

Tenemos dos posibilidades: Que $3a+b = 38$ y $2a+2b = 31$ o al revés, es decir, $3a+b = 31$ y $2a + 2b = 38$. En el primer caso, al restar la segunda ecuación de la primera, obtenemos $a-b = 7$, de donde $b = a-7$ y, el sustituir b en la primera ecuación nos da $38 = 3a+a-7$, de donde $4a = 45$ lo cual es imposible. En el otro caso, de la misma forma obtenemos $a-b = -7$, es decir, $b = a + 7$. Sustituimos b en la primera ecuación para obtener $31 = 3a + a + 7$, lo que nos dice que $4a = 24$, o sea que $a = 6$. Entonces $b = 6 + 7 = 13$. Los números de las tarjetas son: $6, 6, 6, 6, 6, 13, 13, 13$.

Solución. 5. Sabemos que los ángulos internos de un pentágono miden $\frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$. En el triángulo isósceles ADE, los ángulos en A y en D miden

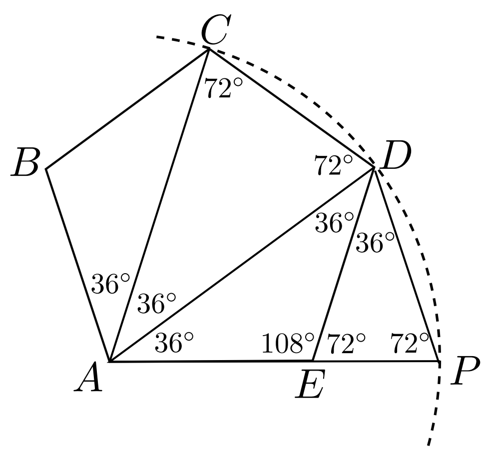
$$\frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ.$$

Análogamente, el ángulo en A del triángulo ABC también mide 36°.

Entonces, el ángulo en A del triángulo CAD mide $108^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 36^\circ$.

Como los triángulos CAD y DAP son isósceles y el ángulo distinto mide 36°, entonces los triángulos son congruentes, $DP = CD = 1$ y $\angle APD = \angle ADC = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$.

También tenemos que el ángulo en E del triángulo DEP mide $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$, de donde el triángulo EPD es isósceles y semejante al triángulo DPA.



Entonces

$$\frac{EP}{DP} = \frac{DP}{AP},$$

es decir,

$$\frac{EP}{1} = \frac{1}{1+EP};$$

de aquí que $EP + EP^2 = 1$ y

$$EP = \frac{-1+\sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$