Soluciones del Examen de la Etapa Semifinal Estatal de la

36ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2022

Solución. 1. Digamos que los números ya están acomodados con la mínma suma S y que E es la suma de los números en las esquinas. Entonces,

$$4S = (1 + 2 + \cdots + 10) + E = 55 + E.$$

Tenemos que $E \leq 7 + 8 + 9 + 10 = 34$, así que $4S \leq 89$. Como S es un número entero, $S \leq 22$.

Veamos que, efectivamente, $S = 22$ es el máximo. Para encontrar una solución, digamos que los números $a, b, c, d, x, y, r, s, t, u$ aparecen en la configuración como se muestra en la figura.

a	r	s	b
x			y
c	t	u	d

Tenemos que $a+r+s+b = c+t+u+d = 22$, así que $(a+r+s+b)+(c+t+u+d) = 44$, pero $a + b + c + d = E = 33$, de donde $r + s + t + u = 44 - 33 = 11$. La única posibilidad es $\{r, s, t, u\} = \{1, 2, 3, 5\}$. Análogamente, $x + y = 11$, así que $\{x, y\} = \{4, 7\}$. Una posible solución se indica en la figura.

6	1	5	10
7			4
9	3	2	8

Solución. 2. Tenemos que $6336 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 11$. Digamos que los números son $a < b < c$. Entonces $6336 = a \cdot b \cdot 12a$, de donde $2^4 \cdot 3 \cdot 11 = \dfrac{6336}{12} = a^2\, b$. Por otro lado, a no puede tener factor 3 ni 11 puesto que 6336 no tiene factor 3^3 ni 11^2. Entonces $a = 2^2 = 4$, $b = 3 \cdot 11 = 33$ y $c = 48$.

Solución. 3. Los triángulos ABD y DBC tienen la misma altura en B y, como $4x+3x+2x+x = 10x$, entonces el área de ABD es la mitad del área de BDC, de donde $|DC| = 4$ y así cada lado del triángulo mide $2 + 4 = 6$.

Escribamos $d = |GC|$. Los triángulos FCG y FGE tienen la misma altura desde F y entonces el mismo argumento de arriba nos dice que $|EG| = 2|GC| = 2d$.

También los triángulos BDE y EDC tienen la misma altura desde D y, otra vez,

$$\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{4x}{x + 2x + 3x} = \frac{4x}{6x} = \frac{2}{3},$$

de donde

$$|BE| = \frac{2}{3}|EC| = \frac{2}{3}3d = 2d.$$

Así $6 = |BC| = |BE| + |EG| + |GC| = 2d + 2d + d = 5d$, de donde $d = \dfrac{6}{5}$ y $|EG| = 2d = \dfrac{12}{5}$.

Solución. 4. Sea f el número de filas y c el número de columnas. Entonces el número total de asientos es

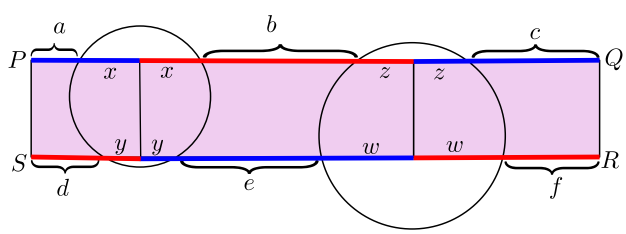
$$fc = 11f + 14c + 17.$$

De aquí tenemos que $(f - 14)(c - 11) = 171 = 3^2 \times 19$. Como $f - 14$ y $c - 11$ son enteros positivos, las posibilidades para $(f - 14, c - 11)$ son $(1, 171)$, $(3, 57)$, $(9, 19)$, $(19, 9)$, $(57, 3)$,$(171, 1)$, así que las posibilidades para (f, c) son $(15, 182)$, $(17, 68)$, $(23, 30)$, $(33, 20)$, $(71, 14)$ y $(185, 12)$, y las posibilidades para fc son 2730, 1156, 690, 660, 994, 2220.

Solución. 5. Por el centro de cada círculo tracemos paralelas al lado menor del rectángulo. Sean x, y, z y w la mitad de las longitudes de las cuerdas, como se indica en la figura. Entonces $x + b + z = y + e + w$, de donde

$$(a + x) + (y + e + w) + (z + c) = (d + y) + (x + b + z) + (w + f).$$

Cancelando x, y, z y w obtenemos $a + e + c = d + b + f$



Solución. 6. Los números de la sucesión son los que se pueden escribir en la forma

$$a_0 + a_1\,3 + a_2\,3^2 + \cdots + a_n\,3^n,$$

con los $a_i \in \{0, 1\}$ no todos 0. Para n fijo, la cantidad de estas expresiones es $2^{n+1} - 1$. Además todas son números distintos, pues si A y B son dos expresiones distintas de este tipo, digamos

$$A = a_0 + a_1\,3 + a_2\,3^2 + \cdots + a_n\,3^n,$$
$$B = b_0 + b_1\,3 + b_2\,3^2 + \cdots + b_n\,3^n,$$

(con, posiblemente, a_n o $b_n = 0$) y r es el mayor tal que $a_r \neq b_r$, entonces, SPG $a_r = 0$ y $b_r = 1$. Así tenemos que

$$\begin{aligned} B - A &= (b_0 + b_1\,3 + b_2\,3^2 + \cdots + b_r\,3^r) - (a_0 + a_1\,3 + a_2\,3^2 + \cdots + a_{r-1}\,3^{r-1}) \\ &\geq (b_0 + b_1\,3 + b_2\,3^2 + \cdots + 3^r) - (3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{r-1}) \\ &\geq 3^r - \frac{3^r - 1}{2} = \frac{2 \cdot 3^r - 3^r + 1}{2} = \frac{3^r + 1}{2} > 0. \end{aligned}$$

Ahora, como la cantidad de expresiones $a_0 + a_1\,3 + a_2\,3^2 + \cdots + a_{n-1}\,3^{n-1}$, con los $a_i \in \{0, 1\}$ no todos 0 es $2^n - 1$, tenemos que en la posición 2^n se encuentra el número 3^n. Como $2^6 = 64$, 820 se encuentra en la posición $2^6 + 2^4 + 2^2 + 1 = 64 + 16 + 4 + 1 = 85$.