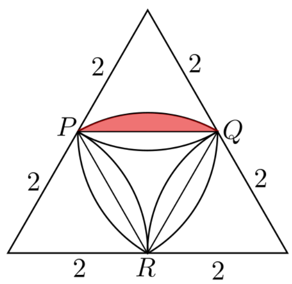
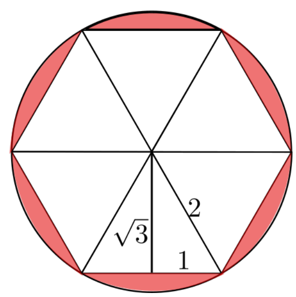
Soluciones de la Etapa Semifinal Estatal de la 35ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2021

Solución 1. La persona 2020 saludó a todas, de manera que saludó a la que tenía el número de lista 2021 y también a la que tenía el 1, y entonces la que tenía el 1 sólo la saludó a ella. De la misma manera, la persona con número 2019 estechó la mano de todas menos de la que tenía el número 1 y entonces la persona 2 estrechó la mano sólo de las personas 2020 y 2019. Así sucesivamente, vemos que la persona 2021 saludó a 1010 (que son las personas con números de lista de 1011 a 2020).

Solución 2. Digamos que $n = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, con $a > c$. Entonces $k = 100c + 10b + a$, de donde $n - k = 99\,(a - c)$. Así, $(a - c)$ multiplicado por 9 debe teminar en 6 y, como $a - c$ es dígito, tenemos que $a - c = 4$. Entonces $n - k = 99 \cdot 4 = 396$.

Solución 3. Llamemos a al área sombreada de la figura de la izquierda. Buscamos calcular $6a$. Notamos que en el círculo que se muestra a la derecha, el área sombreada también es $6a$, porque se obtiene al pegar 6 triángulos equiláteros como PQR, y agregarle un casquete a cada uno.

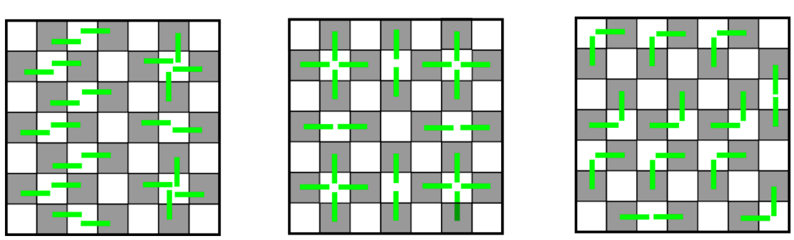




El área total del círculo es $4\pi 2^2 = 4\pi$. El área de cada triángulo equilátero de lado 2 es $\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ porque, por el teorema de Pitágoras, su altura es $\sqrt{3}$. Así

$$6a = 4\pi - 6\sqrt{3}.$$

Solución 4. Como hay 24 cuadros negros y no hay dos que compartan un lado, al menos se necesitan 24 movimientos. Veamos que 24 son suficientes. Para eso, en la figura señalamos una posibilidad con 24 operaciones poniendo pequeñas líneas entre parejas de cuadros cada vez que esa pareja se elige para hacer la operación.



Solución 5. Para que una terna tenga suma impar, debe tener tres impares, o un impar y dos pares. El número total de ternas es 998. Veamos que es imposible que las 998 sumas sean todas impares. Si fuera éste el caso, cada vez que hay un impar, a continuación debería haber 2 pares o 2 impares; entonces los números pares p deberían estar siempre 2 juntos, alternando con un impar i:

$$\dots ppippipp \dots ;$$

sin embargo, hay 500 números pares, de manera que a lo más se podrían formar 250 bloques ppi, y todas otras sumas con resultado impar deberían ser con tres impares; así que forzosamente aparecería un bloque pii, y la suma en este bloque sería par.

Para ver que sí es posible lograr que 997 sumas sean impares, basta ordenar los números como sigue:

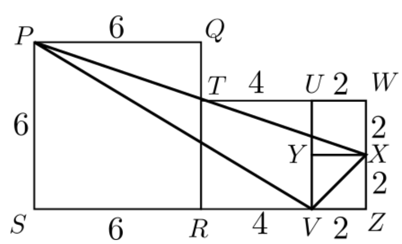
$$ippippippi \cdots iii,$$

en donde se escriben dos números pares y uno impar, hasta terminar con los pares, y luego se escriben los impares que faltan, por ejemplo:

$$1, 2, 4, 3, 6, 8, 5, 10, 12, 7, \dots, 998, 1000, 501, 503, \dots, 997, 999,$$

en donde la única terna que tiene suma par es $(1000, 501, 503)$.

Solución 6. Tenemos que cada lado del cuadrado $PQRS$ mide 6 y cada lado del cuadrado $UVRT$ mide 4. Llamemos a a la medida dal lado del cuadrado $UWXY$. Los triángulos PQT y TWX son semejantes, así que $PQ/QT = TW/WX$, de donde $(4 + a)/a = 6/2 = 3$. Resolvemos la ecuación: $4 + a = 3a$, que da $a = 2$. Sea Z la intersección de la recta WX con la recta SV (ver la figura).



Entonces, para obtener el área PXV hay que restar del área del trapecio $PXZS$ las áreas de los triángulos PSV y XZV. El área de un trapecio de calcula como el promedio de los lados paralelos multiplicado por la altura; en este caso, $\dfrac{(6+2)}{2}(6+4+2) = 48$, así que el área buscada es

$$48 - \frac{6\,(6+4)}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} = 16.$$