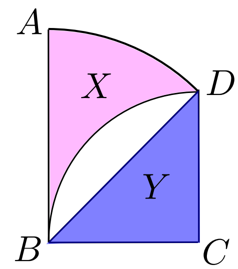
# Soluciones de la Etapa Semifinal Estatal de la 34ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2020




**Problema** 1. En la figura, $BCD$ es un triángulo con ángulo recto en $C$, $AB$ es perpendicular a $BC$, $AD$ es un arco de círculo con centro en $B$ y $BD$ es un arco de círculo con centro en $C$. Probar que las áreas $X$ y $Y$ son iguales.

**Solución** 1. Notemos primero que $BC = CD$ y llamemos $r$ a este valor común. Por el teorema de Pitágoras tenemos que $BD = \sqrt{2}r$. Llamemos $Z$ al área del casquete que queda entre $X$ y $Y$. Bastará que probemos que $X + Z = Y + Z$. Tenemos que $\angle DBC = 45^{\text{o}}$ y entonces también $\angle ABD = 45^{\text{o}}$, así que $X + Z$ es un octavo de sector de círculo con radio $\sqrt{2}r$ y así,

$$X + Z = \frac{1}{8}\pi\left(\sqrt{2}r\right)^2 = \frac{2\pi r^2}{8} = \frac{\pi r^2}{4}.$$

Por otro lado, $Y + Z$ es un cuarto de arco de círculo con radio $r$, de donde

$$Y + Z = \frac{\pi r^2}{4}$$

y esto termina la demostración.

**Problema** 2. ¿Cuántos números entre 1500 y 1900 cumplen que al poner el signo de multiplicación entre la segunda y tercera cifras y realizar la multiplicación de los números de dos cifras que se forman, éste es un cuadrado perfecto? (Por ejemplo, dos números que cumplen la condición son: 1700 y 1872 pues $17 \times 0 = 0 = 0^2$ y $18 \times 72 = 1296 = 36^2$.)

**Solución** 2. Entre 1500 y 1599 hay 3 números pues $15 = 3 \times 5$, así que el número debe ser de la forma $15n^2$ y debe cumplir $0 \leq 15n^2 < 100$, de donde $0 \leq n < \sqrt{100/15}$ y entonces $n = 0, 1, 2$.

Entre 1600 y 1699 hay 10 números pues 16 es cuadrado así que el número debe ser de la forma $n^2$ y debe cumplir $0 \leq n^2 < 100$, de donde $0 \leq n < 10$ y entonces $n = 0, 1, 2, \ldots, 9$.

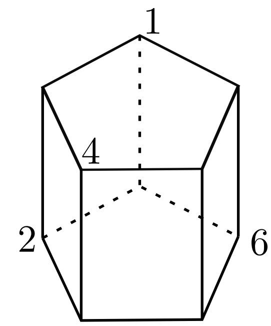
Entre 1700 y 1799 hay 3 números pues 17 es primo así que el número debe ser de la forma $17n^2$ y debe cumplir $0 \leq 17n^2 < 100$, de donde $0 \leq n < \sqrt{100/17}$ y entonces $n = 0, 1, 2$.

Entre 1800 y 1899 hay 8 números pues $18 = 2 \times 9 = 2 \times 3^2$ así que el número debe ser de la forma $2n^2$ y debe cumplir $0 \leq 2n^2 < 100$, de donde $0 \leq n < \sqrt{100/2} = \sqrt{50}$ y entonces $n = 0, 1, 2, \ldots, 7$.

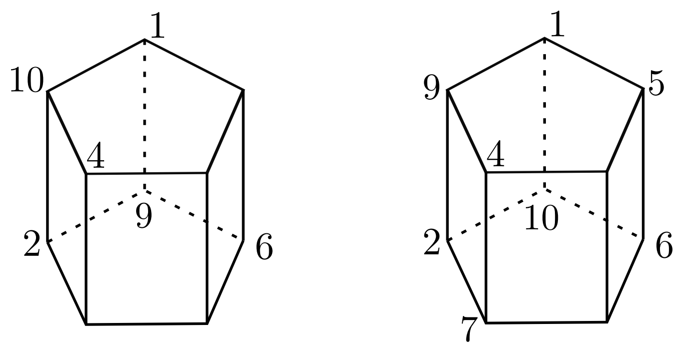
Finalmente el número 1900 cumple la propiedad.

En total son: $3 + 10 + 3 + 8 + 1 = 25$ números.

**Problema** 3. Los vértices del prisma pentagonal que se muestra en la figura se etiquetan con los números del 1 al 10, uno en cada vértice, sin repetir; ya se han etiquetado cuatro vértices. Si en cada una de las 5 caras laterales las sumas de los 4 vértices que las forman son todas iguales, ¿que posibilidades para la suma de la cara pentagonal superior hay?




**Solución** 3. Sea $S$ la suma de los 4 vértices de cualquiera de las caras laterales. Notemos que $5S = 2(1+2+\cdots+10)$ pues cada número aparece en dos de las caras. De aquí tenemos que $5S = 2\cdot 55$, es decir, $S = 22$. Ahora, sean $x$ y $y$ los números que aparecen en la cara lateral que tiene al 1 y al 2. Tenemos que $x+y$ debe ser $22-1-2 = 19$, de manera que la única posibilidad es que uno de $x$ o $y$ sea 9 y el otro sea 10. Trabajemos las dos posibilidades:




Notamos que la de la izquierda es imposible pues en la cara que tiene a 2, 4 y 10 iría 6, que ya se usó. La de la derecha se completa como se muestra, de forma que en la cara superior puede ir cualquiera de 3 u 8. Entonces las posibilidades para la suma de la cara superior son $5+1+9+4+3 = 22$ y $5+1+9+4+8 = 27$.

**Problema** 4. Con los números del 1 al 26 se quieren formar 13 fracciones, usando los números disponibles como numerador o denominador de manera que cada uno de ellos se use sólo una vez. Luego, cada fracción se simplifica. ¿Cuál es la máxima cantidad de enteros que se pueden obtener después de la simplificación?

**Solución** 4. Los números 17, 19 y 23 son números primos y sus dobles se pasan de 26. Por lo tanto, si uno de estos números va a estar en una fracción que se reduce a un entero, debería estar acompañada por el 1. Como sólo tenemos un 1 disponible, tendremos al menos dos números que no podrán estar en una fracción que se simplifique a un entero. Por lo tanto, es imposible que las 13 fracciones se reduzcan a un entero. Con el siguiente ejemplo podemos concluir que el máximo es 12:

$$\frac{23}{1}, \frac{14}{2}, \frac{15}{3}, \frac{12}{4}, \frac{25}{5}, \frac{24}{6}, \frac{21}{7}, \frac{16}{8}, \frac{18}{9}, \frac{20}{10}, \frac{22}{11}, \frac{26}{13}, \frac{19}{17}.$$

**Problema** 5. Un niño puso los números del 1 al 9 en un tablero de $3 \times 3$ de manera que cada número se usó una vez. Para cada renglón, él coloreó la mediana de los tres números en ese renglón y se dio cuenta que la mediana de los tres números coloreados es 5. ¿De cuántas maneras se pudo haber llenado el tablero?

*Nota.* La mediana de tres números es el que está en medio; es decir, si los números son $a$, $b$ y $c$ y $a < b < c$ entonces $b$ es la mediana.

**Solución** 5. Hay 9 maneras de poner el número 5 en el tablero. Luego, tenemos que elegir un número menor que 5 y otro mayor que 5 en ese renglón. Esto se puede hacer de $4 \times 4 \times 2 = 32$ maneras. Esto hace que el 5 sea uno de los números coloreados.

Sin importar cómo rellenemos el resto de las 6 casillas, este acomodo cumplirá el problema. Para ver esto, suponganmos que es falso. Entonces el 5 debe ser el mayor o el menor de los números coloreados.

Si el 5 fuese el menor, quiere decir que los otros dos números coloreados son mayores que 5. Pero esto implica que en esos dos renglones hay 4 números mayores que 5. Como en el renglón del 5 ya hay otro número mayor que 5, tendríamos 5 números mayores a 5 y no hay tantos. Si el 5 es el mayor de los coloreados el procedimiento es similar.

El resto de los números se pueden acomodar de 6! maneras. Por lo tanto el número buscado es $9 \times 32 \times 6! = 207\,360$.

**Problema** 6. Sea $n$ un número entero mayor que 100 tal que el mínimo común múltiplo de los números $1, 2, 3, \ldots, n$ es igual que el mínimo común múltiplo de los números $101, 102, 103, \ldots, n$. Encontrar el menor valor posible de $n$.

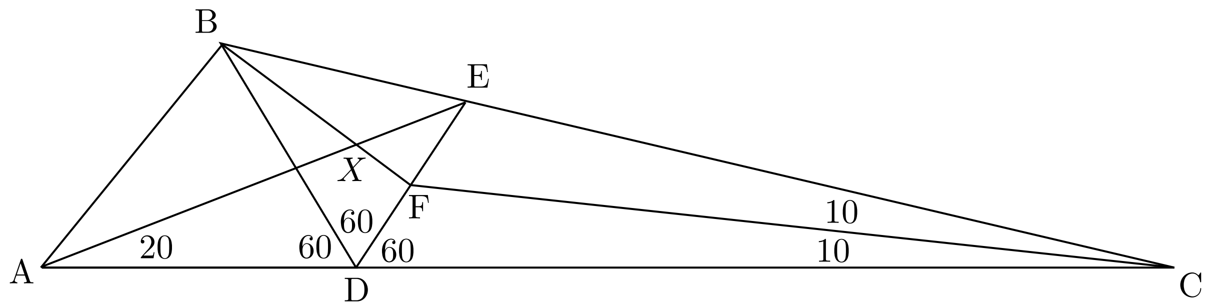
**Solución** 6. Sea $a$ el MCM de $1, 2, 3, \ldots, n$ y sea $b$ el MCM de $101, 102, 103, \ldots, n$. Como 97 es un factor de $a$, también tiene que ser un factor de $b$, pero el primer múltiplo de 97 después de 101 es $2 \times 97 = 194$, así que $n \geq 194$.

Veamos que si $n = 194$ entonces $a = b$. Para ello basta que los números del 1 al 100 sean factores de $b$. Esto es cierto para los números del 1 al 97 pues cada uno de éstos tiene al menos un múltiplo entre el 101 y el 194. Además, tenemos que

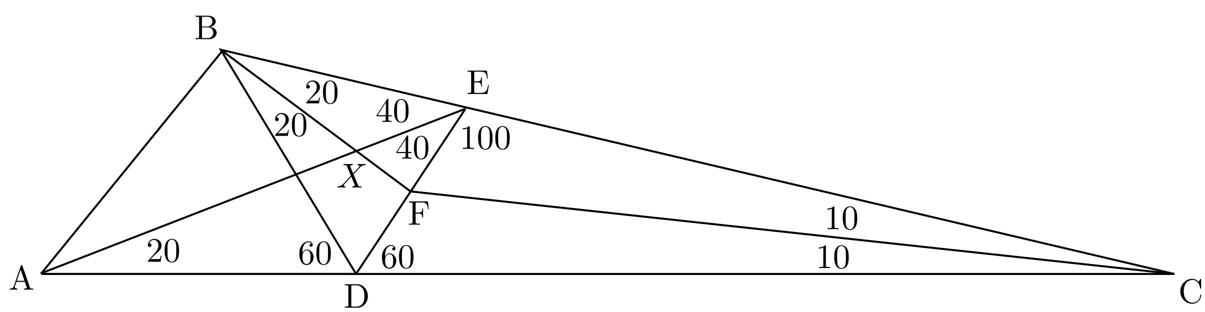
$$\begin{aligned} 98 &= 2 \times 7^2, \\ 99 &= 3^2 \times 11, \\ 100 &= 2^2 \times 5^2. \end{aligned}$$

Luego, tenemos que ver que $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 \times 11$ es divisor de $b$. Esto es cierto pues cada uno de los números $2^2$, $3^2$, $5^2$, $7^2$ y 11 se encuentran como factores entre los números del 101 al 194. Por lo tanto, la respuesta es 194.

**Problema** 7. En el triángulo $ABC$, $D$ y $E$ son los respectivos puntos sobre $AC$ y $BC$ de tal manera que $\angle ADB = \angle BDE = \angle EDC = 60^o$. Además $\angle ACB = 20^o$ y la bisectriz de este último intersecta a $DE$ en $F$ (ver la figura). Sea $X$ la intersección de $AE$ con $BF$. Probar que $XD$ es perpendicular a $AC$.




**Solución** 7. Notamos primero que en el triángulo $BDC$, $DF$ y $CF$ son bisectrices, por lo cual $F$ es el incentro de este triángulo y así $BF$ es bisectriz de $\angle DBE$. También notamos que $\angle DEC = 100^o$ pues la suma de los ángulos en el triángulo $EDC$ es $180^o$ y luego, por la misma razón, en el triángulo $AED$ tenemos que $\angle AED = 40^o$ y entonces $\angle BEA = 40^o$ y los ángulos son como se indica en la figura. Ahora tenemos que en el triángulo $BDE$, $BX$ y $EX$ son bisectrices, de donde $X$ es el incentro de este triángulo y así $XD$ es bisectriz de $\angle BDE$, lo cual nos dice que $\angle XDF = 30^o$ y entonces $\angle XDC = 90^o$, como queríamos probar.



**Problema** 8. Rodrigo fue caminando a casa de su amigo Arturo que vive a 1700 metros de su casa hacia el Norte. Quiere regresar a su casa pero quiere caminar lo menos posible, así que tomará autobuses en dirección Norte o Sur. Lo malo es que desde casa de Arturo hacia el Sur, los autobuses sólo se detienen cada 960 metros y en los mismos lugares en que ésos hacen parada, los autobuses hacia el Norte sólo hacen parada cada 600 metros. ¿Cuántos metros tendrá que caminar si tomará tantos autobuses como sea necesario para caminar lo menos posible?

**Solución** 8. Llamemos $d$ al número de metros que debe recorrer Rodrigo para acercarse lo más posible a su casa. Notamos que $d = 960a - 600b$ para ciertos $a$ y $b$ enteros con $a \geq 0$, $b \geq 0$ pensando que $a$ junta todos los tramos hacia el Sur y $b$ juta todos los tramos hacia el Norte, y, como $960 = 120 \cdot 8$ y $600 = 120 \cdot 5$, así que $d$ debe ser múltiplo de 120 ($d = 120(8a - 5b)$). Buscamos que la diferencia entre 1700 y $d$ sea lo menor posible. El múltiplo de 120 más cercano a 1700 es $1680 = 14 \cdot 120$. Entonces queremos encontrar $a$ y $b$ no negativos tales que $1680 = 960a - 600b$; al dividir esta ecuación entre 120 obtenemos $14 = 8a - 5b$, lo cual se logra con $a = 3$ y $b = 2$, es decir, Rodrigo tomará el autobús hacia el Sur, a la tercera parada bajará y ahí tomará el autobús hacia el Norte esperando a la segunda parada para bajarse y quedando así a 20 m de su casa. (*Nota:* Hay otras soluciones pero la que se indica aquí es en la que Rodrigo haría el recorrido más corto en autobús.)