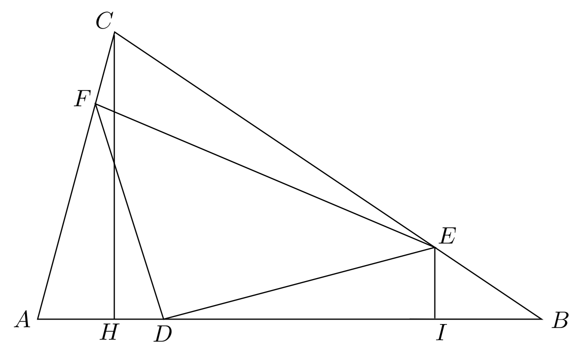
Soluciones del Examen Semifinal Estatal de la 33ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2019

1. Si consideramos los números del 10 al 20 tendremos tres múltiplos de 5 (el 10, 15 y el 20) y tres múltiplos de 3 (el 12, 15 y 18), así que obtenemos una lista de 11 enteros consecutivos balanceada. Veamos que no hay más grandes.
Si la sucesión tiene 12, 13 o 14 elementos, tendremos al menos 4 múltiplos de 3 y a lo más 3 múltiplos de 5.
Si son 15, tendremos 5 múltiplos de 3 y 3 múltiplos de 5, así que hay 2 múltiplos de 3 de más. En los números que siguen, nunca tendremos dos múltiplos de 5 sin algún múltiplo de 3 entre ellos. Esto implica que siempre habrá más múltiplos de 3.

2. Trazamos las alturas de ABC desde C y de DBE desde E. Los triángulos CHB y EIB son semejantes y la razón de semejanza es $4:1$. Entonces $IE = \frac{1}{4}CH$. Como $DB = \frac{3}{4}AB$ tenemos que el área de DBE es igual a



$$\frac{1}{2}IE \cdot DB = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}CH\right)\left(\frac{3}{4}AB\right) = \frac{3}{32}(AB \cdot CH) = \frac{3}{32}(80) = 7.5.$$

De la misma manera, las áreas de los triángulos ADF y CFE son iguales a 7.5, por lo que el área del triángulo DEF es igual a $40 - 3(7.5) = 17.5\,\text{cm}^2$.

3. Restando las ecuaciones obtenemos que $(a-c)(b-1) = 5$, de donde $b-1$ es igual a 1 o 5. Por lo tanto, $b = 2$ o $b = 6$. Veamos cada caso.

- Si $b = 2$ obtenemos el sistema de ecuaciones $2a + c = 34$ y $a + 2c = 29$, cuyas soluciones son $a = 13$ y $c = 8$.

- Si $b = 6$ obtenemos el sistema de ecuaciones $6a + c = 34$ y $a + 6c = 29$, cuyas soluciones son $a = 5$ y $c = 4$.

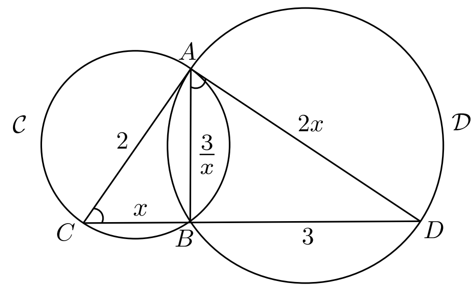
Por lo tanto, podemos concluir que las soluciones son $(a,b,c) = (13,2,8)$ y $(a,b,c) = (5,6,4)$.

4. Como 2 es el único dígito que aparece en todos, entonces 2 no pertenece al número correcto y así las cifras del número buscado son 1, 4, 6 y 7. Entonces 2 aparece en el lugar de alguno de éstos y, al sustituirlo en cada una de las opciones, el número que queda tiene intercambiadas el número sustituido por 2 con otra de las cifras. Veamos cada uno de los casos:

- Si se sustituye 2 en 6427 por 1, obtenemos 6417. El intercambio de 1 con 6 produce 1467; de 1 con 4 produce 6147; de 1 con 7 produce 6471.
- Si se sustituye 2 en 4271 por 6, obtenemos 4671. El intercambio de 6 con 4 produce 6471; de 6 con 7 produce 4761; de 6 con 1 produce 4176.

Ahora ya tenemos el resultado, pues la única coincidencia en los dos casos es 6471. Es fácil verificar que las condiciones del problema se satisfacen para este número.

5. Como AC es diámetro de $\mathcal{C}$ y B es un punto en $\mathcal{C}$, entonces $\angle ABC = 90^{\text{o}}$ y entonces AD es diámetro de $\mathcal{D}$. Por ser CA tangente a $\mathcal{D}$ en A también tenemos que $\angle CAD = 90^{\text{o}}$. Entonces $\angle CAB + \angle BAD = 90^{\text{o}} = \angle CAB + \angle ACB$, de donde $\angle BAD = \angle ACB$ y así los triángulos BAD y BCA son semejantes, de manera que sus lados son proporcionales.



Tenemos así que

$$\frac{BD}{BA} = \frac{AD}{CA},$$

de donde

$$\frac{3}{BA} = \frac{AD}{2}.$$

Sea $|AD| = 2x$; entonces $|BA| = \frac{3}{x}$. Ahora, por el teorema de Pitágoras en el triángulo ABD,

$$\left(\frac{3}{x}\right)^2 + 3^2 = 4x^2,$$

de donde $\dfrac{9}{x^2} + 9 = 4x^2$; multiplicando por x^2 obtenemos $4x^4 - 9x^2 - 9 = 0$ y, resolviendo,

$$x^2 = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 9 \cdot 16}}{8} = \frac{9 \pm 3\sqrt{25}}{8},$$

así que $x^2 = 3$ y entonces el área de $\mathcal{D}$ es 3π.

6. Como $2a = 3b$, forzosamente a es múltiplo de 3; análogamente, de $2a = 5c$ tenemos que a es múltiplo de 5; así se debe tener que a es múltiplo de 15. Escribamos $a = 15x$; tenemos entonces que $b = 10x$ y $c = 6x$. Digamos también que $a^2 + b^2 + c^2 = N^3$. Sustituyendo obtenemos

$$N^3 = 225x^2 + 100x^2 + 36x^2 = 361x^2.$$

Como N debe ser entero y $361 = 19^2$ y 19 es primo, tenemos que 19^2 tiene que dividir a x. Así, una solución posible es

$$(a, b, c) = (15 \cdot 361, 10 \cdot 361, 6 \cdot 361).$$

Nota: Las demás soluciones se obtienen poniendo $x = 19^2 z^3$ con z un entero positivo.

7. Podemos notar 4 niveles en la figura como se señala abajo. En cada uno de los niveles hay 12 formas de escoger cómo se pasa al siguiente nivel (2 formas en cada eslabón grande y 4 en cada par de los eslabones chicos). Una vez que se hace esa elección, el camino queda determinado. Entonces la respuesta es 12^4.