Soluciones del Examen Semifinal Estatal de la 32ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2018

1. Escribamos i por cada uno de los dígitos impares y p por cada dígito par. Para que la suma de 3 números consecutivos no sea par, se necesita que los 3 sean impares o que 2 sean pares y el otro impar. Entre los números del 2 al 8 hay 4 pares y 3 impares, de manera que la única posibilidad es que el número sea *ippippi*. Ahora, digamos que un número es del tipo $\overline{0}$ si deja deja residuo 0 al dividirlo entre 3 (en nuestro caso, son los dígitos 3 y 6). De igual manera, consideramos los números del tipo $\overline{1}$ (aquí son 4 y 7) y los del tipo $\overline{2}$ (5 y 8). Las únicas posibilidades de que tres números consecutivos sumen múltiplo de 3 son cuando aparecen juntos $\overline{0}$, $\overline{1}$ y $\overline{2}$ en algún orden, o cuando los tres números tienen el mismo residuo.

Buscamos el menor de los números *ippippi*, así que probemos con los números de la forma $3pp5pp7$. Observemos que 3 es del tipo $\overline{0}$, 5 es del tipo $\overline{2}$, y 7 es del tipo $\overline{1}$. Considerando que entre los dígitos pares hay uno del tipo $\overline{0}$ (el 6), uno del tipo $\overline{1}$ (el 4) y dos del tipo $\overline{2}$ (el 2 y el 8), entonces 12 posibilidades para los tipos de los números:

$$
\begin{array}{rc}
(1) & \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{1}\ \overline{0}\ \overline{1} \\
(2) & \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{0}\ \overline{1}\ \overline{1} \\
(3) & \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{1}\ \overline{1} \\
(4) & \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{0}\ \overline{1} \\
(5) & \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \overline{1} \\
(6) & \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{1} \\
(7) & \overline{0}\ \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{1}\ \overline{1} \\
(8) & \overline{0}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{0}\ \overline{1} \\
(9) & \overline{0}\ \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \overline{1} \\
(10) & \overline{0}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{1} \\
(11) & \overline{0}\ \overline{0}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{1} \\
(12) & \overline{0}\ \overline{1}\ \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{1}
\end{array}
$$

Observamos que en los casos (3) y (9) son los únicos que no tienen tres números del tipo $\overline{2}$ juntos ni tres números seguidos de distinto tipo. Como buscamos el menor de los números, éste está dado por el caso (3) eligiendo 2 como el primer número par de tipo $\overline{2}$. El número buscado es 3265847.

2. Buscamos que las piezas tengan área $\frac{28}{2} = 14$. Podemos notar entonces que el problema equivale a ver de cuántas maneras puede escribirse el número 14 como suma de 4 enteros entre 1 y 6: el primer número nos diría cuántos cuadros quedan a la izquierda en el renglón inferior, el segundo número los que quedan a la izquierda en el renglón que le sigue, etcétera (los números en el ejemplo que se da en el enunciado serían $(3, 5, 5, 1)$). Las colecciones de 4 números que cumplen esto en los que los números están ordenados de mayor a menor son

las siguientes:

$$\begin{array}{lcl}
\text{(A)} & \cdots & (6,6,1,1) \\
\text{(B)} & \cdots & (6,5,2,1) \\
\text{(C)} & \cdots & (6,4,3,1) \\
\text{(D)} & \cdots & (6,4,2,2) \\
\text{(E)} & \cdots & (6,3,3,2) \\
\text{(F)} & \cdots & (5,5,3,1) \\
\text{(G)} & \cdots & (5,5,2,2) \\
\text{(H)} & \cdots & (5,4,4,1) \\
\text{(I)} & \cdots & (5,4,3,2) \\
\text{(J)} & \cdots & (5,3,3,3) \\
\text{(K)} & \cdots & (4,4,4,2) \\
\text{(L)} & \cdots & (4,4,3,3).
\end{array}$$

Ahora tenemos que contar el orden posible de los números en cada caso.

Cuando todos los números son distintos, entonces hay $24 = 4!$ formas distintas de acomodarlos, lo cual ocurre en (B), (C) e (I), así que tenemos $24 \cdot 3 = 72$ posibilidades.

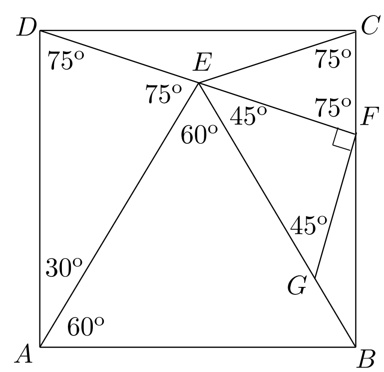
Cuando hay dos números distintos y cada uno se repite dos veces, como es el caso de (A), (G) y (L), entonces las posibilidades de orden son 6, de manera que aquí hay $6 \cdot 3 = 18$ más.

Cuando hay tres números distintos (y uno de ellos aparece dos veces), como es el caso de (D), (E), (F) y (H), entonces las posibilidades de orden son 12, de manera que aquí hay $12 \cdot 4 = 48$ posibilidades.

El último caso es cuando hay dos números distintos y uno aparece 3 veces, como en (J) y (K), en cada uno de los cuales hay 4 posibilidades de orden y tenemos $4 \cdot 2 = 8$ más.

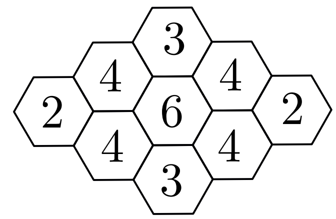
En total hay $72 + 18 + 48 + 8 = 146$.

3. Primero recordemos que los ángulos de un triángulo equilátero miden todos 60^o. Ahora observemos que $|AD| = |AE|$, así que el triángulo ADE es isósceles y, como $\angle DAE = 30^o$, entonces $\angle ADE = \angle DEA = \frac{180^o - 30^o}{2} = 75^o$. También tenemos que $\angle FEB = 180^o - 75^o - 60^o = 45^o$. Como EF y FG son perpendiculares, deducimos que $\angle FGE = 45^o$ y entonces $|FG| = |EF|$.



Por otro lado, por simetría, $\angle ECB = 75^o$. También, por ángulos entre paralelas tenemos que $\angle EFC = 75^o$, así que el triángulo ECF es isósceles con $|EC| = |EF|$ y, por lo que teníamos, $|EC| = |FG|$.

4. Cada hexágono sombreado contribuye en 1 a los hexágonos con los que comparte un lado, así que si a cada hexágono le asignamos el número de hexágonos con los que comparte lado, entonces el problema es equivalente a ver de cuántas formas se puede sumar 12 con esas asignaciones. Las asignaciones se muestran en la figura de la derecha.



Las formas de sumar 12 usando a lo más dos $2'$s, dos $3'$s, cuatro $4'$s y un 6 son las siguientes:

$*$ Tipo 1. $6+4+2$. Aquí hay cuatro formas de escoger el 4 y dos formas de escoger 2, así que en total son 8.

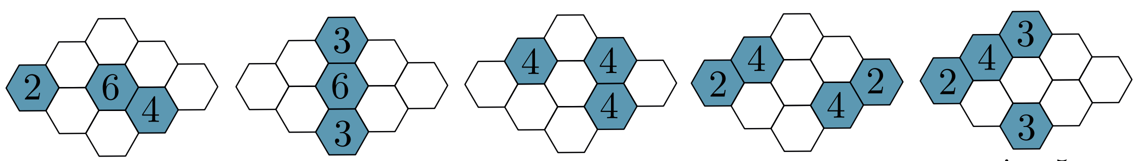
$*$ Tipo 2. $6+3+3$. Sólo hay una forma.

$*$ Tipo 3. $4+4+4$. Hay 4 formas.

$*$ Tipo 4. $4+4+2+2$. Hay 6 formas de escoger los $4'$s y una forma de escoger los $2'$s, de manera que de este tipo hay 6.

$*$ Tipo 5. $4+3+3+2$. Hay 4 formas de escoger el 4, una única de escoger los dos $3'$s y 2 formas de escoger el 2, de manera que de este tipo hay 8.

En la siguiente figura se muestra un ejemplo de cada tipo.



tipo 1 tipo 2 tipo 3 tipo 4 tipo 5

En total hay $8+1+4+6+8=27$.