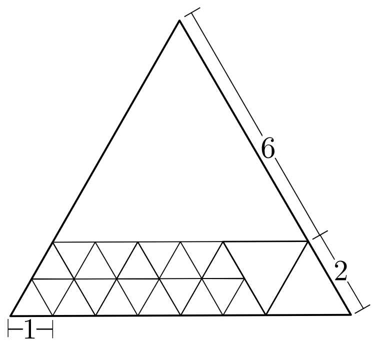
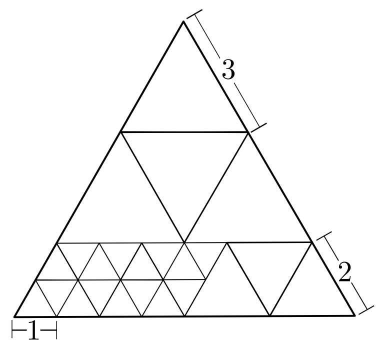
**Soluciones del Examen Semifinal Estatal de la**
**31ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2017**

1. Observemos que una vez que tengamos una partición en triángulos equiláteros, al trazar paralelas a los lados por los puntos medios de cualquiera de los triángulos, se obtienen 3 triángulos más que los que se tenían. Como $23 = 8 + 3 \cdot 5$, obtengamos primero una forma de partir en 8 triángulos y después dividamos 5 de ellos en 4. Mostramos dos formas de hacerlo en la figura.




En la de la izquierda hay 20 triángulos de lado 1 cm, 2 de lado 2 cm y 1 de lado 6 cm. En la de la derecha hay 16 de lado 1 cm, 3 de lado 2 cm y 4 de lado 3 cm.

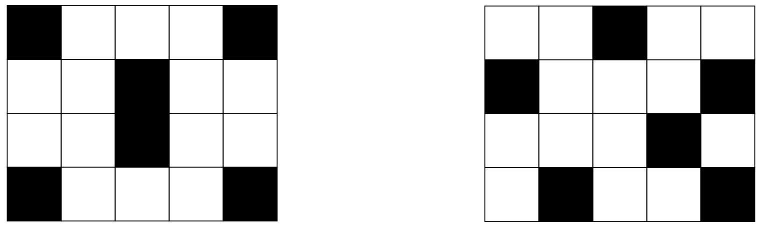
2. Como $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, las posibilidades de las cifras, su respectiva suma y la cantidad de posibilidades cuando la suma es 15 se muestran en la siguiente tabla:

| cifras | suma | posibilidades |
|---|---|---|
| 9,2,2,2 | 15 | 4 |
| 9,4,2,1 | 16 | |
| 9,8,1,1 | 19 | |
| 8,3,3,1 | 15 | 12 |
| 6,6,2,1 | 15 | 12 |
| 6,4,3,1 | 14 | |
| 6,3,2,2 | 13 | |
| 4,3,2,2 | 11 | |

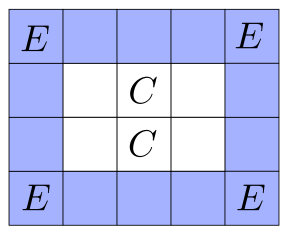
Para ver que cuando las cifras son 9,2,2,2 hay 4 posibilidades, basta observar en qué posición de las 4 queda el 9. Para ver que cuando las cifras son 8,3,3,1 hay 12 posibilidades, observamos que hay 6 posibilidades para acomodar los $3'$s (que son en los lugares 1-2, 1-3, 1-4, 2-3, 2-4 y 3-4); para cada una de éstas, hay dos formas de acomodar el 8, y entonces el lugar del 1 queda determinado (por ejemplo, si las posiciones para los $3'$s son 2-3, entonces las posibilidades son 8331 y 1338, y si las posiciones para los $3'$s son 2-4, entonces las posibilidades son 8313 y 1383). El mismo razonamiento aplica para cuando las cifras son 6,6,2,1.

Entonces, en total hay $4 + 12 + 12 = 28$ y ésta es la respuesta.

3. La mínima cantidad es 6. La siguiente figura muestra dos formas distintas que prueban que sí es posible con 6.



Para ver que no es posible con menos, empecemos por observar que la cuadrícula tiene 20 cuadros, y distingamos algunos de ellos, marcándolos en la figura: 2 cuadros centrales: $C$, 4 esquinas: $E$, y 14 cuadros en la periferia: sombreados.




En lo que sigue, al pintar un cuadro negro, digamos que 'quedan cubiertos' él mismo y los cuadros que comparten un lado con él.

Supongamos que es posible cubrir a toda la cuadrícula con sólo 5 cuadros negros. Como cada esquina debe estar junto a un cuadro negro, entonces debe haber, por lo menos 4 cuadros negros en la periferia; pero cada uno de ellos cubre, a lo más, 4 cuadros, así que con éstos 4 se cubren a lo más $4 \times 4 = 16$ cuadros, y seguro quedan descubiertos los dos cuadros centrales y (al menos) 2 en la periferia. Es claro que un solo cuadro negro no puede cubrir a esos 4 faltantes.

4. Notemos primero que, para que la lista sea sorpresiva, como todos los conjuntos deben tener la misma cantidad de elementos, el número de elementos de la lista debe ser múltiplo de 3. Además, si llamamos $c$ a la constante y $n$ al número de elementos de la sucesión, entonces la sucesión es:

$$(5 + 0c, 5 + 1c, 5 + 2c, \ldots, 5 + (n-1)c)$$

y, como $5 + (n-1)c = 71$, entonces $(n-1)c = 71 - 5 = 66$. Esta ecuación sólo puede satisfacerse cuando $c$ es un factor de 66, es decir, para $c = 1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66$. Veamos para cuáles de éstos se tiene que $n$ es múltiplo de 3. Como

$$n = \frac{66}{c} + 1,$$

sustituyendo los posibles valores de $c$ obtenemos los respectivos valores para $n$:

$$67, 34, 23, 12, 7, 4, 3, 2;$$

los únicos que son múltiplos de 3 es 12. Es claro que 3 no sirve. Tenemos que 12 corresponde a $c = 6$ y entonces la sucesión buscada es

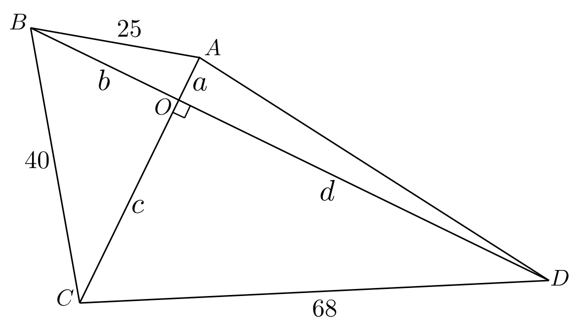
$$(5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, 65, 71).$$

La partición en 3 conjuntos con la misma suma es

$$\{5, 11, 65, 71\}, \{17, 23, 53, 59\}, \{29, 35, 41, 47\},$$

y cada uno de ellos tiene suma $38 \times 4 = 152$. (Cabe hacer notar aquí que 38 es el promedio de todos los números, y también de las parejas $(5, 71)$, $(11, 65)$, $(17, 59)$, etcétera.)

5. Llamemos $a$, $b$, $c$ y $d$ a las distancias de los vértices del cuadrilátero al punto $O$, como se indica en la figura.




Usando el teorema de Pitágoras tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 25^2 = 625, \\ b^2 + c^2 &= 40^2 = 1600. \end{aligned}$$

Restando la primera igualdad de la segunda, tenemos $c^2 - a^2 = 1600 - 625 = 975$; pero $c^2 - a^2 = (c+a)(c-a) = 39(c-a)$, de donde $c - a = 975/39 = 25$. Ahora, restando esta última ecuación de la ecuación $c + a = 39$ y dividiendo entre 2 tenemos que $a = (39 - 25)/2 = 7$, como queríamos probar.

Ahora, como $a + c = 39$, deducimos también que $c = 39 - 7 = 32$. De aquí ya podemos calcular $d$ usando el teorema de Pitágoras en el triángulo $OCD$ para obtener

$$d = \sqrt{68^2 - 32^2} = \sqrt{4624 - 1024} = \sqrt{3600} = 60.$$

El área del triángulo sombreado es

$$\frac{60 \times 7}{2} = 210.$$

(*Nota*. Es posible calcular el área del triángulo sombreado usando que $a = 7$, aun sin probarlo. La demostración de esto es, simplemente, el párrafo anterior.)