Soluciones del Examen Semifinal Estatal de la
30ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2016

1. Vamos a ver que el único entero que satisface la condición es 36. Llamemos n al número y a y b a sus dígitos, con $n = 10a + b$. Como n es par, también b es par (distinto de 0).

Si $b = 2$, entonces $10a + 2 = 4a$, de donde $6a = -2$ y esto es imposible. De la misma manera no es posible el caso $b = 4$.

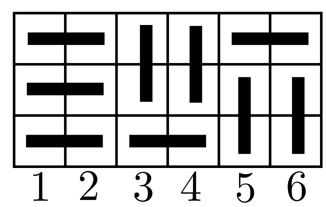
Si $b = 6$, entonces $10a + 6 = 12a$, de donde $2a = 6$ y de aquí que $n = 36$.

Si $b = 8$, entonces $10a + 8 = 16a$, de donde $6a = 8$, lo cual es imposible.

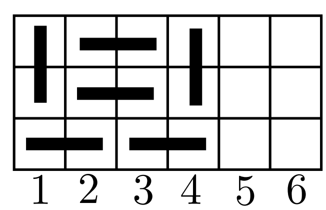
2. El arco BP mide $\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$ de la mitad de la circunferencia, así que el ángulo POX mide $\frac{4}{9} \cdot 180^o = 80^o$. Dado que OPB es un triángulo rectángulo, tenemos que $\angle AXP = \angle OXP = 180^o - 90^o - 80^o = 10^o$.

3. Como son 18 cuadritos, el tablero se cubre con 9 fichas de manera que 4 son verticales. Esas cuatro atraviesan forzosamente el segundo renglón, de manera que quedan exactamente dos cuadritos del renglón central que deben cubrirse con una ficha horizontal (así que deben estar juntos). Numeremos las columnas del 1 al 6 de izquierda a derecha y consideremos los diferentes casos en que puede quedar la ficha horizontal en el renglón central.

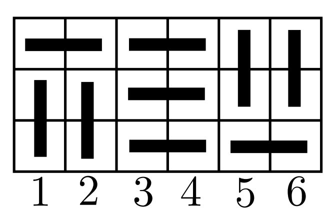
Si queda entre las columnas 1 y 2, en esas columnas debe haber tres horizontales, y las siguientes dos fichas verticales (en columnas 3 y 4) deben usar los mismos dos renglones lo cual puede hacerse de 2 formas, y lo mismo para las fichas verticales en las columnas 5 y 6. En total son 4 posibilidades. A la derecha mostramos una posibilidad.



Si queda entre las columnas 2 y 3, en esas columnas, en la primera columna hay 2 posibilidades para colocar la ficha vertical y cualquiera de las dos colocaciones determina por completo la colocación de las fichas en las primeras 4 columnas. A la derecha se muestra una de ellas. Otra vez, hay dos posibilidades para colocar las fichas verticales en las columnas que falta llenar. En total en este caso son 4 posibilidades.



Si queda entre las columnas 3 y 4, en esas columnas las tres fichas quedan en forma horizontal y hay 2 posibilidades de colocar las fichas verticales en las primeras dos columnas y dos posibilidades de colocar las verticales en las últimas 2 columnas, de modo que también en este caso hay 4 posibilidades. Mostramos a la derecha una de esas 4.

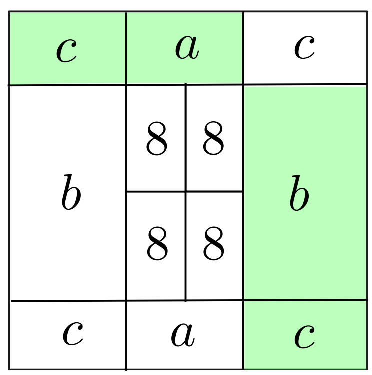


El caso de que quede entre las columnas 4 y 5 es análogo al de las columnas 2 y 3, y el caso de que quede entre las columnas 5 y 6 es análogo al de que quede en las columnas 1 y 2, así que cada uno de estos casos contribuye con 4 posibilidades más. En total son $5 \times 4 = 20$.

4. *Primera forma.* Observemos primero que $648 = 2^3 \cdot 3^4$ y que los números que tienen seis divisores son de la forma p^5 y pq^2 con p y q primos. En el primer caso, el producto de cualesquiera de sus divisores sería potencia de p, así que no es éste el caso. En el segundo caso, los primos que aparecen en n son 2 y 3. Tenemos dos posibilidades: $n = 2 \cdot 3^2$ y $n = 3 \cdot 2^2$. Si $n = 2 \cdot 3^2$, sus divisores son 1, 2, $2 \cdot 3$, 3, 3^2 y $2 \cdot 3^2$. El producto de todos salvo 3^2 es justo 648, y entonces el sexto factor es $3^2 = 9$. Si $n = 3 \cdot 2^2$, entonces los divisores de n son 1, 2, 2^2, 3, $2 \cdot 3$ $2^2 \cdot 3$ y no hay forma de que cinco de ellos tengan producto 648. Entonces la única posibilidad es $n = 18$ y el sexto factor es 9.

Segunda forma. Dado un divisor d de n, tenemos que $\frac{n}{d}$ también es divisor de n. Como la cantidad de divisores de n es par, entonces cada d es diferente de $\frac{n}{d}$. Luego, el producto de los seis divisores es igual a n^3. Dado que $648 = 2^3 \cdot 3^4$, para que el producto de los 6 divisores sea un cubo es necesario que el divisor faltante sea un múltiplo de $3^2 = 9$. Por lo anterior, $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^6} = 2 \cdot 3^2 = 18$ debe ser un divisor de n. Como 18 tiene exactamente 6 divisores, $n = 18$ y el divisor faltante es 9.

5. Partamos el cuadrado en rectángulos en forma simétrica, y llamemos a, b y c a las áreas de los rectángulos, como se indica.



Tenemos que $2a + 2b + 4c + 32 = 100$, así que $a + b + 2c = 34$, y ésta es la respuesta.