Soluciones del Examen Semifinal Estatal de la
28ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2014

1. Hay la misma cantidad de números que empiezan con cada uno de los números del 1 al 7 (son 6!). Como 4 está a la mitad entre 1 y 7, el número buscado empieza con 4. Ahora, de los números que empiezan con 4, la mitad siguen con 1, 2 o 3, y la otra mitad con 5, 6 o 7, así que el número que buscamos sigue con 3. Entonces los números que empiezan con 43 son los últimos de la primera mitad y el número que buscamos es 4376521.

2. Tenemos lo siguiente:

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{25}{19} = 1 + \frac{6}{19}.$$

Entonces a es la parte entera de $\frac{25}{19}$, así que $a = 1$. Además

$$\frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{6}{19},$$

de donde

$$b + \frac{1}{c} = \frac{19}{6} = 3 + \frac{1}{6}.$$

Otra vez, de aquí deducimos que $b = 3$ y también que $c = 6$.

3. *Primera forma.* Sean a, b, c, d, e, f los elementos de X. Es claro que no todos los elementos pueden ser pares; supongamos entonces que a es impar. Los subconjuntos de 3 elementos son los siguientes 20:

$$\begin{array}{llllllllll}
\{a,b,c\} & \{a,b,d\} & \{a,b,e\} & \{a,b,f\} & \{a,c,d\} & \{a,c,e\} & \{a,c,f\} & \{a,d,e\} & \{a,d,f\} & \{a,e,f\} \\
\{b,c,d\} & \{b,c,e\} & \{b,c,f\} & \{b,d,e\} & \{b,d,f\} & \{b,e,f\} \\
\{c,d,e\} & \{c,d,f\} & \{c,e,f\} \\
\{d,e,f\}
\end{array}$$

Queremos entonces que 10 de ellos estén fomados por sólo números pares y como dijimos que a es impar y 10 de los conjuntos contienen a a, deberemos tener que los demás b, c, d, e, f son pares, es decir, deben ser 5 pares.

Segunda forma. Digamos que p es la cantidad de pares en X. La cantidad de subconjuntos de X formada por 3 pares es $\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}$, y la cantidad total de suconjuntos de X con 3 elementos es $\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!}$. Entonces p debe satisfacer

$$\frac{p(p-1)(p-2)}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{2}.$$

El número 5 debe desaparecer del denominador al simplificar, así que alguno de p, $p-1$ o $p-2$ debe ser 5. Es claro que p no puede ser 6. Para $p = 5$ tenemos

$$\frac{p(p-1)(p-2)}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{2},$$

como queríamos.

4. Como $10^2 = 6^2 + 8^2$, el triángulo ABC satisface el teorema de Pitágoras, así que el ángulo en A es recto y entonces M es el centro de la circunferencia circunscrita y tenemos que $AM = MC$.

De aquí concluimos que el triángulo AMC es isósceles, lo que nos dice que $\angle MAC = \angle MCA$ y así, los triángulos ABC y MFA son semejantes. Esto implica que

$$\frac{6}{8} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|MF|}{|MA|} = \frac{|MF|}{5},$$

y de aquí que $|MF| = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$. Como el área de la región sombreada se obtiene restando el área del triángulo AMF de la del cuadrado $AMDE$, tenemos que el resultado es

$$25 - \frac{5}{2}\frac{15}{4} = 25\left(1 - \frac{3}{8}\right) = 25 \cdot \frac{5}{8} = \frac{125}{8}.$$

5. Observemos que en cada renglón y en cada columna, la diferencia de dos números consecutivos debe ser una constante (posiblemente distintas para distintos renglones o columnas). Sean a, b, c y d las respectivas diferencias de dos números en cuadros consecutivos del primer renglón, la última columna, la primera columna y el último renglón. Entonces el borde de la cuadrícula queda como indica la figura.

1	$1+a$	$1+2a$	$1+3a$
$1+c$			$1+3a+b$
$1+2c$			$1+3a+2b$
$1+3c$	$1+3c+d$	$1+3c+2d$	$1+3a+3b$ 19 $1+3c+3d$

Tenemos entonces que $19 = 1 + 3a + 3b$, de donde $a + b = 6$ y, análogamente, $c + d = 6$. Observemos también que los dos números extremos de cada renglón y de cada columna deben diferir por un múltiplo de 3 (pues uno se obtiene sumando la misma constante 3 veces al otro).

En particular, eso ocurre en la segunda columna, es decir, $1 + a$ y $1 + 3c + d$ difieren por un múltiplo de 3, así que $a - d$ debe ser también múltiplo de 3.

Para contar los posibles casos, supongamos que $a \geq c$ (los otros casos se obtendrán reflejando con respecto a la diagonal, es decir, invirtiendo el papel de (a, b) con el de (c, d)).

La condición de que los números van en orden creciente en cada renglón de izquierda a derecha y en cada columna de arriba a abajo nos dice que los números a, b, c, d son todos positivos. Las posibilidades de (a, b, c, d) que cumplen, $a \geq c$, $a + b = 6 = c + d$ y $a - d$ múltiplo de 3 son:

$$(5, 1, 1, 5), (5, 1, 4, 2), (4, 2, 2, 4), (3, 3, 3, 3), (2, 4, 1, 5)$$

En la figura se muestra cómo construir la cuadrícula en cada caso.

1	6	11	16
2	7	12	17
3	8	13	18
4	9	14	19

1	6	11	16
5	9	13	17
9	12	15	18
13	15	17	19

1	5	9	13
3	7	11	15
5	9	13	17
7	11	15	19

1	4	7	10
4	7	10	13
7	10	13	16
10	13	16	19

1	3	5	7
2	5	8	11
3	7	11	15
4	9	14	19

Hasta aquí tenemos 5 casos. Al invertir el papel de (a, b) con el de (c, d) obtenemos otros 4:

$$(1, 5, 5, 1), (4, 2, 5, 1), (2, 4, 4, 2), (1, 5, 2, 4)$$

para un total de 9.