Soluciones del Examen Semifinal Estatal de la 24ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2009

1. *Primera forma.* Tenemos las siguientes posibilidades para las pelotas rojas: Si hay 0 fuera, entonces en la caja negra puede haber de 0 a 6 pelotas rojas (y el resto en la caja blanca); éstas son 7 posibilidades. Si hay 1 pelota roja fuera, entonces puede haber de 1 a 6 pelotas en la caja negra (y el resto en la blanca; éstas son 6 posibilidades más. Así sucesivamente hasta la última posibilidad de que todas las pelotas rojas estén fuera. En total las posibilidades para las pelotas rojas son: $7+6+5+4+3+2+1 = 28$. De la misma manera, tenemos que las posibilidades para las pelotas azules son $6+5+4+3+2+1 = 21$. El total de posibilidades es $28 \cdot 21 = 588$.

Segunda forma (para alumnos que manejan la técnica de separadores). Para contar las posibilidades de las pelotas rojas necesitamos ver el número de posibilidades de que la suma de tres números enteros no negativos sea 6. Ponemos 8 casillas en una fila horizontal y escogemos dos lugares en esas casillas en las que se ponen *separadores*; el número de casillas a la izquierda del primer separador representa el número de pelotas fuera de las cajas, el número de casillas entre los dos separadores representa el número de pelotas en la caja negra y el número de casillas a la derecha del segundo separador representa el número de pelotas en la caja blanca. Como la forma de escoger dos lugares en 8 posibles es $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$, éstas son las distintas formas de distribuir las pelotas rojas. Análogamente, para distribuir las azules hay $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ formas. El total es $28 \cdot 21 = 588$.

2. Hay muchas posibilidades. Presentaremos aquí dos de ellas.

Primera forma. Tomemos potencias de 2 de manera que el producto de los dos menores exceda al mayor. Consideremos entonces los enteros

$$2^a, 2^{a+1}, 2^{a+2}, 2^{a+3} \text{ y } 2^{a+4};$$

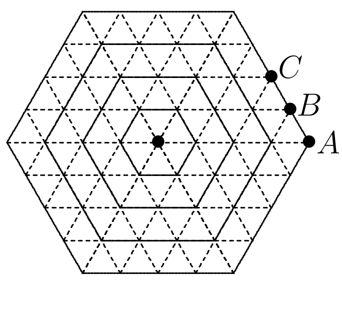
queremos que $2^a \cdot 2^{a+1} \geq 2^{a+4}$ y esto ocurre si $2a + 1 \geq a + 4$, así que podemos tomar $a = 3$, de donde 5 enteros que cumplen las condiciones son: 8, 16, 32, 64 y 128.

Segunda forma. Consideremos 5 números primos distintos, por ejemplo 2, 3, 5, 7 y 11, y construyamos los 5 números que se obtienen multiplicando todos salvo uno:

$$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11,\ 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11,\ 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11,\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \ \text{ y } \ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Al multiplicar dos de ellos aparecen todos los primos al menos una vez, así que el resultado es múltiplo de cualquiera de los 5 números.

3. Con líneas continuas formando hexágonos concéntricos, partamos la telaraña como se indica en la figura y observemos que los caminos deben tocar exactamente una vez cada uno de estos hexágonos. Observemos también que hay tres tipos de vértices en la orilla, indicados por A, B o C en la figura. Los del tipo A son 6, los del tipo B son 12 y los del tipo C son 6. Contemos por separado el número de formas de llegar a cada uno.

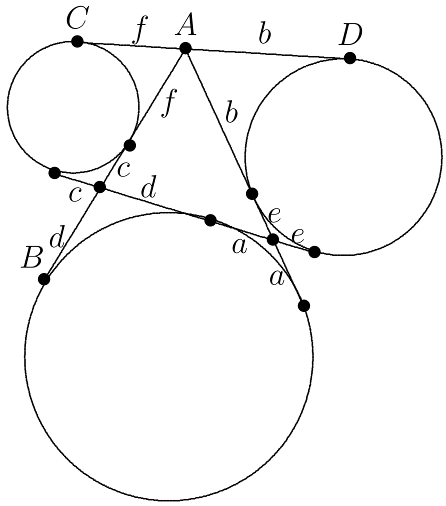


Para llegar a un vértice del tipo A sólo hay una forma: en línea recta.
A un vértice del tipo B se puede llegar de 4 maneras:

Para llegar a un vértice del tipo C se puede llegar de 6 maneras:

El número total de caminos es $6 + 12 \cdot 4 + 6 \cdot 6 = 90$.

4. Sabemos que si desde un punto exterior a un círculo se trazan las dos tangentes, entonces las distancias del punto exterior a los puntos de tangencia son iguales (esto es por simetría). Usando esto, llamemos a, b, c, d, e y f a las distancias indicadas en la figura.



También por simetría tenemos que

$$c + d + a + e = f + b \quad (*)$$

Por otro lado,

$$f + c + d = b + e + a \quad (**)$$

Sumando las ecuaciones $(*)$ y $(**)$ obtenemos

$$f + 2c + 2d + a + e = f + 2b + e + a$$

de donde $c + d = b$ y así $|CD| = f + b = f + c + d = |AB| = 10$.

5. Primero observemos que el número de negras siempre es impar puesto que al principio lo es y el número de negras de un paso al paso siguiente se modifica como sigue: Si se voltean dos negras el número disminuye en 2, si se voltean dos blancas el número aumenta en 2, y si se voltean una negra y una blanca el número queda igual.

Ahora veamos que podemos lograr una negra en cualquier lugar y el resto de blancas. De $BNBNBN$, al voltear las dos primeras logramos $NBBNBN$; luego, al voltear la cuarta y la sexta obtenemos $NBBBBB$; aquí ya hemos logrado 1 negra en la primera posición y 5 blancas en las demás; a partir de esta posición es claro que podemos lograr una negra en cualquier posición y las demás blancas (simplemente escogemos voltear la primera y la que esté en la posición en donde queremos que esté la negra).

Para lograr 3 negras y 3 blancas buscamos obtener una negra en alguna de las posiciones donde queremos que haya negra y las demás blancas (esto se puede gracias a lo dicho arriba); después se voltean las dos fichas que estén en los otros dos lugares donde queremos que haya negras.

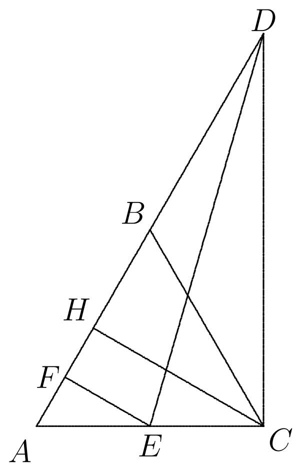
Lograr 5 negras y 1 blanca es análogo a lograr 1 negra y 5 blancas, pues trabajamos con los colores a la inversa.

Ahora contemos las posibilidades:

Primera forma: El número de posibilidades de tener 1 negra y 5 blancas es 6 y también éste es el número de posibilidades de tener 5 negras y 1 blanca. Para ver el número de posibilidades de tener 3 negras debemos escoger los lugares donde quedan y las posibilidades son: 123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156, 234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356 y 456 (son 20 posibilidades); otra forma es pensando que para escoger uno de los lugares en que aparece una negra tenemos 6 posibilidades, luego para escoger otro de los lugares donde hay negra tenemos 5 posibilidades y para el último lugar tenemos 4 posibilidades; sin embargo $6 \cdot 5 \cdot 4$ cuenta cada arreglo 6 veces (pues, por ejemplo, el arreglo 123 se repite como 132, 213, 231, 312 y 321). La cantidad total en este caso es $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$. El total es $6 + 20 + 6 = 32$.

Segunda forma: Observemos que la mitad de las posiciones tiene un número impar de negras y la otra mitad tiene un número par de negras. Para convencernos de esto pensemos que si vamos formando la fila poniendo una ficha cada vez, la mitad de las veces el número de negras que se tenía antes de agregar la ficha se conserva al agregarla (cuando se pone esa ficha en posición B) y la otra mitad de las veces (cuando se pone esa ficha en posición N) aumenta en 1 (y en ese caso cambia de par a impar o viceversa). Como el número total de posiciones es 2^6, el número de posiciones que tiene una cantidad impar de negras es $\frac{2^6}{2} = 2^5 = 32$.

6. Consideremos la siguiente figura en la que H es el punto medio de AB:



Como $\angle ABC = 60^\circ$, tenemos que $\angle CBD = 120^\circ$. El triángulo CBD es isósceles, así que $\angle BDC = \angle BCD = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. Como en el triángulo ADC los ángulos interiores deben sumar 180°, obtenemos que $\angle ACD = 90^\circ$. Entonces los triángulos DFE

y DCE son iguales. Por el teorema de Pitágoras en el triángulo ADC tenemos que $|DC| = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Entonces $|AF| = |DA| - |DF| = 4 - 2\sqrt{3}$. Por otro lado, como ABC es equilátero y H es el punto medio de AB, resulta que CH es perpendicular a AB y entonces los triángulos AFE y AHC son semejantes, lo cual nos dice que

$$\frac{|AF|}{|AH|} = \frac{|FE|}{|HC|},$$

pero, por el teorema de Pitágoras en AHC, vemos que $|HC| = \sqrt{3}$. Entonces

$$\frac{4 - 2\sqrt{3}}{1} = \frac{|FE|}{\sqrt{3}},$$

de donde $|FE| = 4\sqrt{3} - 6$. El área de AFE es

$$\frac{|AF| \cdot |FE|}{2} = \frac{(4 - 2\sqrt{3})(4\sqrt{3} - 6)}{2} = (2 - \sqrt{3})(4\sqrt{3} - 6) = 14\sqrt{3} - 24.$$