SOLUCIONES DEL EXAMEN DE LA ETAPA SEMIFINAL ESTATAL DE LA 21ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

1. *Primera forma.* Procedamos al revés: En el décimo paso el número debe haber llegado a 2 o 3; los que dan lugar a 2 en el noveno paso son dos: 4 y 5, y los que llegan a 3 también son dos: 6 o 7. Así podemos deducir que en cada paso debemos multiplicar por 2, y en total las posibilidades son 2^{10}.
   Segunda forma. Los números que llegan a 1 en 10 pasos son los que en base 2 se escriben como $2^{10} + y$ con $0 \leq y < 2^{10}$, es decir, los números desde el $2^{10} = 1024$ hasta el $2^{11} - 1 = 2047$. Éstos son $2047 - 1023 = 1024$.

2. Observemos que tenemos que colocar cuatro números con residuo 0 (3, 6, 9 y 12), tres con residuo 1 (4, 7 y 10) y tres con residuo 2 (5, 8 y 11). Los cuatro múltiplos de 3 deben ir en los 4 cuadritos que están solos en su columna o renglón. Abajo del 1 debe ir cualquiera con residuo 2 y arriba del 2 debe ir cualquiera con residuo 1. Escribamos en los cuadritos el residuo del número que debemos poner. Hasta el momento hemos deducido el acomodo:

		0			
	1			1	
0	2			2	0
			0		

   Ahora veamos que los cuadros centrales, en el renglón que tiene al 1, deben estar dos números que sumen un número con residuo 1; como ya no sobran números con residuo 0, entonces la única posibilidad de lograrlo es poniendo ambos con residuo 2. Análogamente en el renglón que tiene al 2 deben ir dos números con residuo 1, como indicamos en la figura:

		0			
	1	2	2	1	
0	2	1	1	2	0
			0		

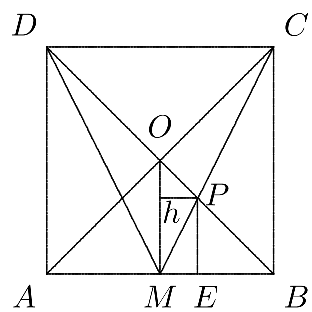
   Entonces las posibilidades de acomodar los cuatro que tienen residuo 0 son $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; las posibilidades de acomodar los tres que tienen residuo 1 son $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ y lo mismo para acomodar los tres con residuo 2. El resultado es $24 \cdot 6 \cdot 6 = 864$.

3. El hexágono $PQRSTU$ es regular y con el mismo centro que $ABCDEF$. Sea O el centro de ambos. El lado buscado es igual a OP. Tenemos que $CF = FP = PC = 2$ por ser radios de los arcos dibujados; entonces CFP es equilátero de lado 2 y OP es una altura de este triángulo que, por Pitágoras, es igual a $\sqrt{3}$.

4. Escoger la pareja (a, b) equivale a escoger su punto medio $a+\frac{1}{2}$. Lo mismo para la pareja (c, d). Sin embargo no queremos que $a + \frac{1}{2} = c + \frac{1}{2}$ ni que la direrencia entre éstos sea 1. Esto equivale a elegir dos números cualesquiera entre 1 y 98 y sumarle 1 al mayor de ellos, lo cual puede hacerse de $\frac{98\times 97}{2}$ formas.

5. A puede asegurar su triunfo jugando como sigue: En el primer turno quita uno de los montones e imagina que numera los cuatro que quedan usando los números -2, -1, 1 y 2. Después juega imitando lo que B haga pero en el montón que lleva el signo contrario al que B escogió.

6. Sea O el centro del cuadrado y sea P la intersección de MC con BD. En el triángulo OMP sea h la algura sobre P. Llamemos E al pie de la perpendicular a AB por P.



Tenemos que $ME = h$. Por otro lado, el triángulo MPE es semejante al triángulo MCB, así que $ME = \frac{PE}{2}$, es decir, $PE = 2h$. Como $\angle PBE = 45^o$ entonces $EB = PE = 2h$. Entonces $\frac{1}{2} = MB = ME + EB = 3h$, de donde $h = \frac{1}{6}$, y de aquí el área de OPM es $\frac{OM\cdot h}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{24}$. El área sombreada es el doble: $\frac{1}{12}$.