

Etapa Semifinal Estatal de la 31ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2017

Tiempo límite: 4 horas.

Escribe todos los razonamientos.

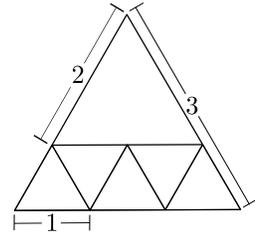
No puedes usar calculadora.

Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.

Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de los problemas.

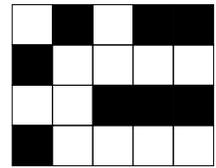
1. En la figura se muestra una forma de partir un triángulo equilátero en 6 triángulos equiláteros en donde el triángulo original tiene lado 3 cm y queda partido en uno de lado 2 cm y 5 de lado 1 cm.

Determinar una forma de partir un triángulo equilátero en 23 triángulos equiláteros y, suponiendo que los más pequeños queden con lado 1 cm, decir cuántos quedan de cada medida.



2. Águeda olvidó el número que abre su candado, pero tiene apuntado que es un número de 4 cifras, que el producto de las cifras es 72 y que la suma de las cifras es 15. ¿Cuántas combinaciones máximo deberá intentar para lograr abrir el candado?

3. Se quiere pintar algunos de los cuadros en una cuadrícula de 4×5 de negro de tal forma que cada cuadro no pintado comparta por lo menos un lado con algún cuadro pintado. Por ejemplo, una coloración que cumple esto se muestra en la figura de la derecha. Determinar cuál es el mínimo número de cuadros que deben pintarse de negro. (Nota. Debe darse una coloración con la cantidad de cuadros que se determine, y también debe probarse que no es posible con menos.)



4. Una lista de números enteros es *sucesión aritmética* si la diferencia de cada dos términos consecutivos es una misma constante. (Por ejemplo, $(8, 9, 10, 11)$ y $(3, 7, 11, 15, 19)$ son sucesiones aritméticas; en la primera, la constante es 1, y en la segunda es 4; además notamos que la primera empieza en 8 y termina en 11, y la segunda empieza en 3 y termina en 19.)

Llamemos una lista de números *sorpresiva* si sus elementos pueden separarse en tres conjuntos con la misma cantidad de elementos y la misma suma. (Por ejemplo, una lista sorpresiva es $(2, 6, 8, 1, 4, 9)$ pues se puede partir en los conjuntos $\{2, 8\}$, $\{6, 4\}$ y $\{1, 9\}$ y los tres conjuntos tienen 2 elementos y suma 10.)

Determinar todas las sucesiones aritméticas que empiecen en 5, terminen en 71 y sean sorpresivas.

5. En el esquema de la derecha se muestra un cuadrilátero en que las diagonales son perpendiculares entre sí y se intersectan en el punto O ; la diagonal AC mide 39, y las longitudes de los lados AB , BC y CD son como se indica en la figura.

Probar que la distancia de B a O es 24 y encontrar el área del triángulo sombreado.

