

ETAPA SEMIFINAL ESTATAL DE LA 22^a OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

Tiempo límite: 4 horas.

Escribe todos los razonamientos.

No puedes usar calculadora.

Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.

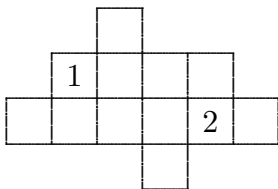
Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de las preguntas del examen.

1. Dado un entero positivo n lo dividimos entre 2 sin considerar decimales; al nuevo número le hacemos lo mismo, y así sucesivamente hasta obtener el número 1. Nos fijamos en cuántos pasos hicimos para llegar a 1. Por ejemplo si $n = 74$, entonces se necesitan 6 pasos

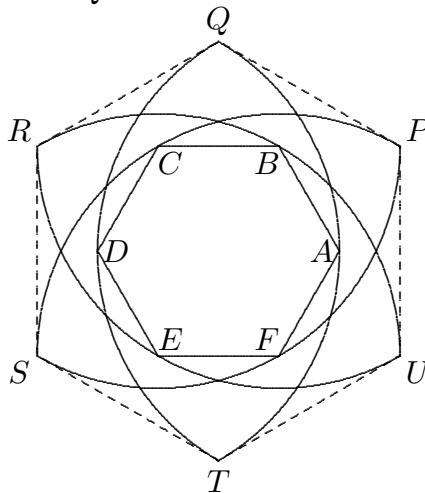
$$74 \rightarrow 37 \rightarrow 18 \rightarrow 9 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

¿Cuántos enteros necesitan exactamente 10 pasos?

2. En el siguiente tablero queremos acomodar los números del 1 al 12 (uno en cada cuadrito, sin repetir), de tal forma que en cada uno de los renglones y en cada una de las columnas la suma de los que aparezcan sea múltiplo de 3. (Nótese que hay 4 renglones y 6 columnas; dos de los renglones y dos de las columnas constan de un solo cuadrito.) Si los números 1 y 2 están en el lugar que se muestra, ¿de cuántas formas podemos hacer la distribución?



3. En la figura se muestra un hexágono regular $ABCDEF$ de lado 1. Los arcos de círculo que están dibujados tienen centro en cada vértice del hexágono y radio igual a la distancia al vértice opuesto. P, Q, R, S, T y U son los puntos donde se cortan estos arcos. ¿Cuánto mide cada lado del hexágono $PQRSTU$?



4. ¿De cuántas maneras es posible escoger 4 números enteros distintos entre 1 y 100 tales que $b = a + 1$ y $d = c + 1$?

5. En la mesa hay 5 montones de fichas, cada uno con 5 fichas. Dos personas A y B van a jugar un juego por turnos. Empieza A . En cada turno el jugador debe retirar el número de fichas que quiera pero sólo de uno de los montones (por lo menos debe retirar una ficha). Pierde el primero que ya no pueda jugar. ¿Cuál de los dos jugadores puede asegurar su triunfo? y ¿cómo debe jugar para lograrlo?

6. El cuadrado $ABCD$ de la figura tiene lado 1 y M es el punto medio del lado AB . ¿Cuál es el área de la región sombreada?

