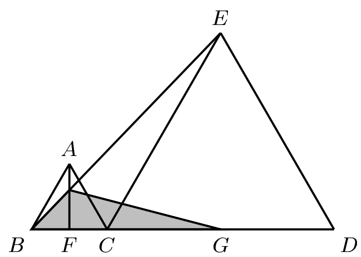
Examen Semifinal de la 16a Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Tiempo límite: 4 horas.
Escribe todos los razonamientos.
No puedes usar calculadora.
Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.
Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de las preguntas del examen.

Problema 1. En una mesa hay 350 canastas vacías numeradas del 1 al 350. Sabemos que Andrés puso una pelota en cada canasta con número par, Beatriz puso una pelota en cada canasta con número múltiplo de 3, Carlos puso una pelota en cada canasta con número múltiplo de 5 y Diana puso una pelota en cada canasta con número múltiplo de 11. Encuentra dos canastas con números consecutivos que tengan exactamente 4 pelotas entre las 2.

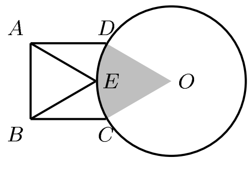
Problema 2. En una lista están escritos los números del 1 al 16. ¿Es posible tachar 4 de ellos de manera que al multiplicar cualesquiera 2 de los 12 que queden el resultado no sea el cuadrado de un número entero?

Problema 3. En la figura los triángulos ABC y CDE son equiláteros, C es el punto sobre BD tal que $BC = 1$ y $CD = 4$, y F y G son los puntos medios de BC y CD, respectivamente. ¿Cuál es el área del triángulo sombreado?



Problema 4. La lista $(1, x_2, x_3, \ldots, x_n, 1000)$ es la sucesión más larga de enteros positivos tal que cada término a partir del tercero es la suma de todos los anteriores (por ejemplo $x_4 = 1 + x_2 + x_3$). ¿Cuánto vale x_2?

Problema 5. En la figura los puntos C, D y E están sobre una circunferencia con centro en O; $ABCD$ es un cuadrado y ABE un triángulo equilátero. Si el área del círculo es 1, ¿Cuál es el área de la región sombreada?



Problema 6. Una cuadrícula de 8×2 quiere cubrirse con 8 fichas de 2×1 de manera que todos los cuadritos estén cubiertos (en la figura de abajo puede verse una posible forma de hacerlo). ¿De cuántas maneras puede hacerse esto?