Soluciones del Examen de la Etapa final Estatal de la

38ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2024

Solución. 1. Cada segmento de la línea hexagonal es la mitad de la arista correspondiente (paralela al segmento); por ejemplo, MN es la mitad de BC. Entonces la longitud es

$$\frac{1}{2}(10+5+6+7+8+6) = 21.$$

Solución. 2. Alternadamente asignemos a los números los colores rojo y azul. Notamos que al principio los números en las orillas tienen distinto color. Antes de empezar a jugar, Lázaro comparará la suma de los números rojos con la de los azules. Si, por ejemplo los rojos tienen mayor (o mayor o igual) suma que los azules, Lázaro empezará escogiendo el número rojo de la orilla. Entonces en la orilla quedarán dos números azules, de manera que Domingo estará forzado a escoger un número azul, abriendo la posibilidad a Lázaro de escoger otra vez un número rojo. Así sucesivamente Lázaro podrá tener todos los números rojos en su lista y su suma será mayor o igual a la de los números de Domingo.

Solución. 3. Queremos ver para qué enteros a se tiene que

$$16(a^2-a-1)^2 \equiv 0 \pmod{2a-1}.$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
16(a^2-a-1) &= 16(a^4+a^2+1-2a^3-2a^2+2a)\\
&= 16(a^4-2a^3-a^2+2a+1)\\
&= 16a^4-32a^3-16a^2+32a+16.
\end{aligned}$$

Dos formas de proceder aquí son las siguientes:

Primera forma. Notamos que $2a \equiv 1 \pmod{2a-1}$. Entonces la última expresión es

$$(2a)^4 - 4(2a)^3 - 4(2a)^2 + 16(2a) + 16 \equiv 1-4-4+16+16 = 25,$$

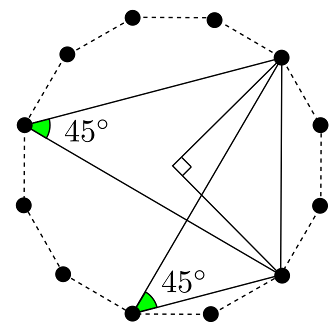
de manera que $2a-1 \mid 25$, de donde $2a-1 = \pm 1, \pm 5, \pm 25$ y así $a = 1, 0, 3, -2, 13, -12$.

Segunda forma. Podemos hacer la división polinomial:

$$
\begin{array}{r|r}
 & 8a^3 - 12a^2 - 14a \;\; + 9 \\ \hline
2a-1 & 16a^4 - 32a^3 - 16a^2 + 32a + 16 \\ \hline
 & -24a^3 - 16a^2 + 32a + 16 \\ \hline
 & -28a^2 + 32a + 16 \\ \hline
 & -14a + 16 \\ \hline
 & 25
\end{array}
$$

Al igual que arriba, para que el residuo sea 0, necesitamos que 25 sea múltiplo de $2a-1$ y así tenemos la misma conclusión que en la forma anterior.

Solución. 4. Pongamos los vértices del polígono sobre un círculo. Como un ángulo central que abarque puntos espaciados 3 lugares mide $90°$, entonces un ángulo de $45°$ se forma escogiendo dos puntos separados 3 lugares (hay 12 posibilidades) y cualquiera de los 8 vértices del lado contrario (ver figura). Sin embargo notamos también que hay triángulos que se cuentan doble de esta manera, que son los triángulos rectángulos isósceles y hay 12 de éstos. La respuesta es $12 \times 8 - 12 = 84$.



Solución. 5. Si la suma de los impares es I y la de los pares es P, entonces $I + P = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$, que es impar, así que I y P deben tener distinta paridad, por lo cual $I-P$ también debe ser impar: $\pm 11, \pm 33, \pm 55, \ldots$. Por otro lado, si $\pm(I-P) \geq 33$, al resolver esto junto con $I + P = 45$, obtenemos que $\{I, P\} = \{6, 39\}$, pero no es posible que 4 (o 5) números del 1 al 9 sumen 6 (porque lo mínimo sería $1+2+3+4 = 10$). Entonces bastará considerar $I - P = \pm 11$ que, junto con $I + P = 45$, nos da $\{I, P\} = \{28, 17\}$.

Notemos también que, una vez encontradas las cifras en posición impar, éstas podrán revolverse entre sí, y lo mismo las que estén en posición par, de manera que, cada conjunto de cifras que encontremos deberemos multiplicarlo por $5! \cdot 4!$.

Primer caso: $P = 17$. Se da con las siguientes 8 cuartetas (la suma I se formará con el resto de los números):

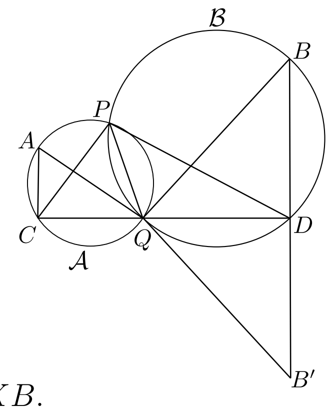
$$\begin{array}{ll} (1,2,5,9), & (1,3,6,7), \\ (1,2,6,8), & (2,3,4,8), \\ (1,3,4,9), & (2,3,5,7), \\ (1,3,5,8), & (2,4,5,6). \end{array}$$

Las 2 quintetas siguientes nos dan $I = 17$:

$$(1,2,3,4,7), \quad (1,2,3,5,6).$$

El resultado es $10 \cdot 5! \cdot 4! = 28\,800$.

Solución. 6. Notemos que $\angle ACQ = 90^\circ = \angle BDQ$ por abarcar diámetros en los círculos. Además, por abarcar el mismo arco en círculos y en vista de que PQ es bisectriz de $\angle CPD$, tenemos las siguientes igualdades de ángulos: $\angle CAQ = \angle CPQ = \angle QPC = \angle QBD$. Por lo tanto, los triángulos ACQ y BDQ son semejantes. Ahora, reflejemos el triángulo QBD a través de la recta CD y sea B' el reflejado de B. Entonces, $\angle B'QD = \angle BQD = \angle AQC$, de manera que A, Q y B' están alineados. Así, si X es cualquier punto sobre la recta CD, tenemos que



$$AQ + QB = AQ + QB' \leq AX + XB' = AX + XB.$$

Solución. 7. Si $a \geq 2$, entonces $b \geq 2$ y así

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{c+2}.$$

Por lo tanto $a = 1$. Ahora tenemos

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{b+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{c+2},$$

de donde

$$\frac{1}{b+2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{c+2}.$$

Por lo tanto $\frac{1}{b+2} > \frac{1}{6}$, de donde $b + 2 < 6$ y de aquí que $b = 1, 2, 3$.

$$\frac{1}{c+2} = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}, & \text{si } b = 1, \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}, & \text{si } b = 2, \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}, & \text{si } b = 3. \end{cases}$$

En consecuencia, las ternas buscadas son $(1, 1, 4)$, $(1, 2, 10)$ y $(1, 3, 28)$.

Solución. 8. En la figura de la izquierda se muestran 7 hexágonos ajenos entre sí, de manera que forzosamente en cada uno de ellos debe haber un 1. Entonces el mínimo es mayor o igual a 7. En la figura, a la derecha se muestra una configuración con suma 7, así que 7 es el mínimo.