Soluciones para el Examen de la Etapa Final Estatal de la 37ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2023

Primer día

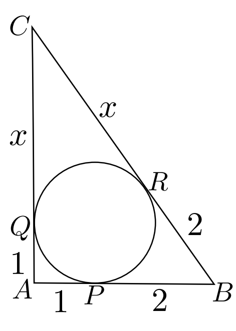
Solución 1. En la división entre 4 entre los números del 1 al 19 hay cuatro con residuo 0, y cinco con cada uno de los residuos 1, 2 y 3. Podemos poner todos los que tienen residuo 2 en un conjunto: $\{2, 6, 10, 14, 18\}$, poner dos de los elementos que tienen 0 con todos los de residuo 1 en otro conjunto: $\{4, 8, 1, 5, 9, 13, 17\}$, y los otros dos elementos con residuo 0 con todos los de residuo 3 en un tercer conjunto: $\{12, 16, 3, 7, 11, 15, 19\}$.

Supongamos que sí se puede separar el conjunto de los números del 1 al 20 como pide el enunciado y tomemos una separación tal. En la división entre 4, entre los números del 1 al 20 hay cinco con cada uno de los residuos. Ninguno de los conjuntos puede tener 3 números con residuo 0, de manera que cada uno de los conjuntos tiene al menos un elemento con residuo 0. Por otro lado, alguno de los conjuntos debe tener dos elementos con residuo 2; esos dos elementos junto con uno de residuo 0 del mismo conjunto suman un múltiplo de 4 y esto es una contradicción.

Solución 2. Sea R el punto de tangencia de BC con el círculo. Sin pérdida de generalidad digamos que $AP = 1$. Entonces $PB = 2$. Sabemos que $|AP| = |AQ|$, $|BP| = |BR|$ y $|CQ| = |CR|$. Llamemos x a esta última distancia. Entonces, por el teorema de Pitágoras, tenemos que

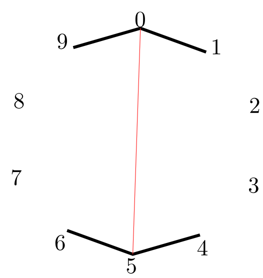
$$(1 + x)^2 + (1 + 2)^2 = (x + 2)^2.$$

Desarrollamos para obtener $x^2 + 2x + 1 + 9 = x^2 + 4x + 4$, de donde $2x = 6$ y así $x = 3$. Entonces $\dfrac{AQ}{QC} = \dfrac{1}{3}$.



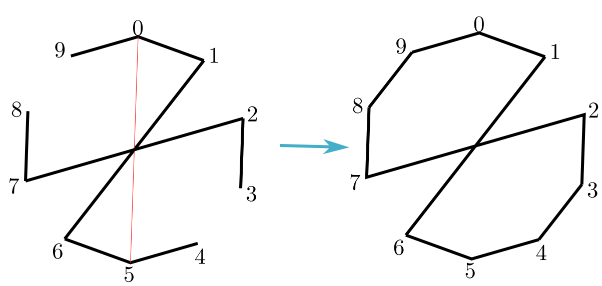
Solución 3. Digamos que las casas están en los vértices de un polígono regular de 10 lados. Llamemos aristas a cada una de las líneas que unen un vértice con otro al que puede pasar directamente, es decir, a los lados del polígono y a las diagonales que van de un vértice al vértice opuesto. En cada vértice hay 3 aristas, de las cuales un camino usa exactamente dos. Fijémonos en las posibilidades de elección de las dos aristas que se usan a partir de la casa de Mariana (sin considerar el sentido). Tenemos, esencialmente, dos posibilidades; la primera es que se usen los que unen 0 con los dos lados del polígono y la otra posibilidad es que se use la arista que une 0 con 5 y, digamos, 0 con 1 (el caso de 0 con 5 y 0 con 9 será análogo).

Caso A. Si se usan los caminos que unen 0 con 1 y con 9. Entonces la arista de 0 a 5 no se usa, de manera que deben usarse las aristas que unen 5 con 4 y con 6.

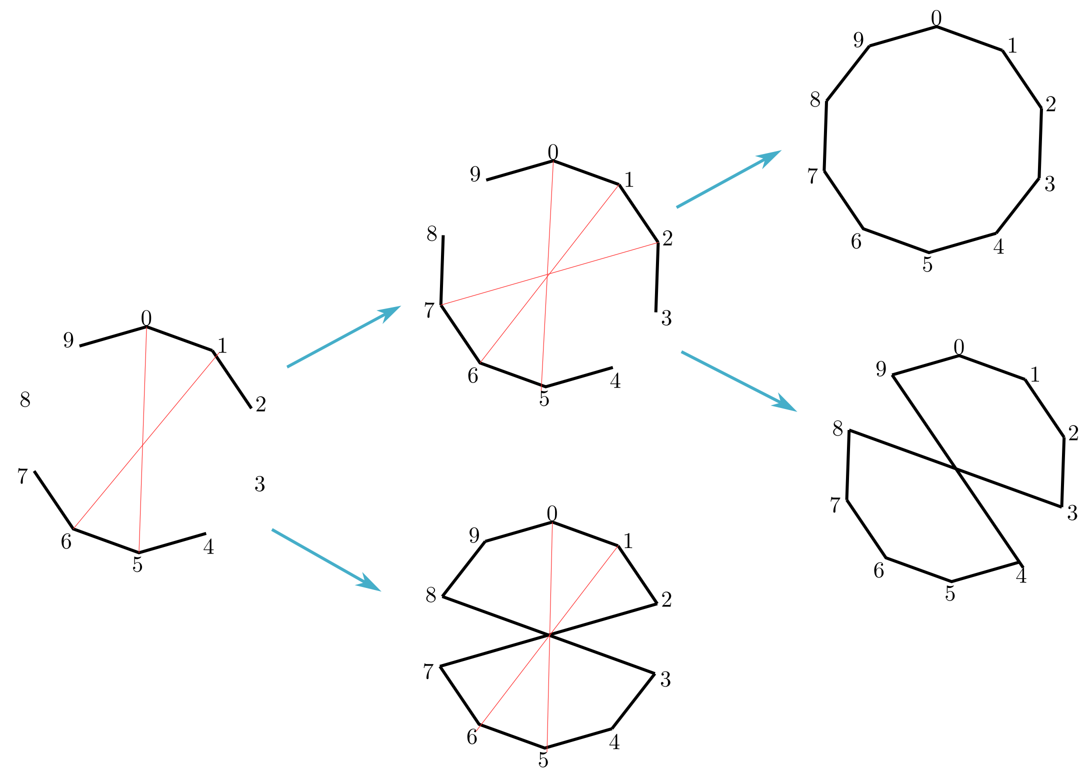


Otra vez aquí hay dos posibilidades, según si se usa la arista que une 1 con 6 o la arista que une 1 con 2.

Caso A1. Si se usa la arista que une 1 con 6, entonces no se usa la arista entre 1 y 2, ni tampoco la que une 6 con 7, así que se usa la diagonal entre 2 y 7, y también la arista entre 7 y 8 y la arista entre 2 y 3. Además notamos que si se usara la diagonal entre 4 y 9 el recorrido se cerraría antes de visitar todas las casas (pues sería 0-1-6-5-4-9-0 o en el otro sentido). Las aristas usadas se muestran en la siguiente figura.

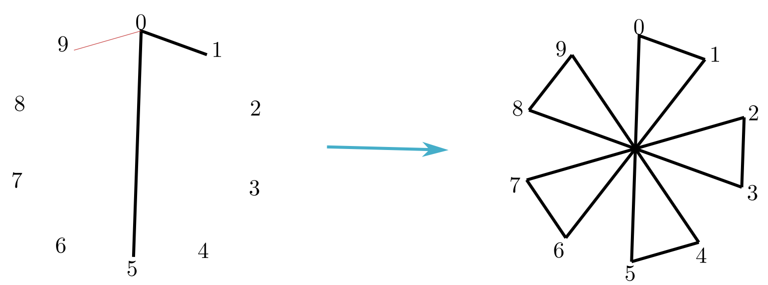


Caso A2. Cuando se usa la arista entre 1 y 2. Como no se usa la diagonal entre 1 y 6, se deben usar las aristas entre 6 y sus dos vecinos. Aquí tenemos dos posibilidades, que se use la diagonal entre 2 y 7 o que no. La ramificación en este caso se muestra en la figura.

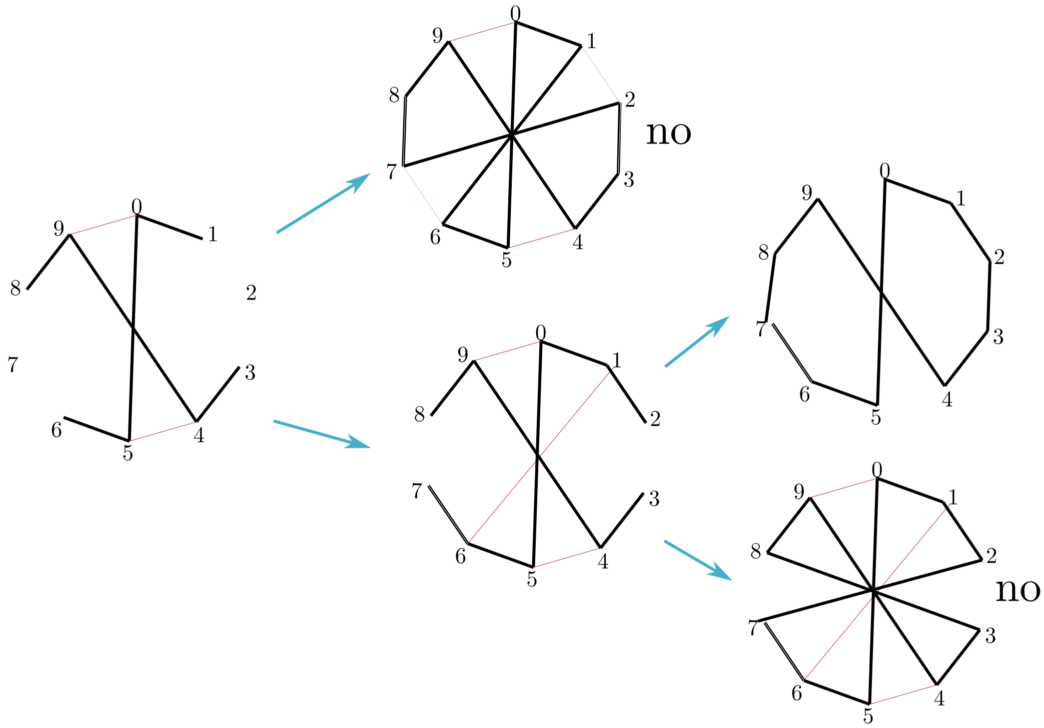


Caso B. Se usa la diagonal entre 0 y 5 y, digamos, la arista entre 0 y 1. Nuevamente aquí tenemos dos posibilidades para la otra arista de 5: que sea la que va a 4 o la que va a 6.

Caso B1. Se usa la arista entre 5 y 4. Como arriba, completamos el camino y queda como se ve en la figura.



Caso B2. Se usa la arista entre 5 y 6. Entonces 4 está unido con 3 y con 9 y 5 está unido con 6 y 9 está unido con 8. La ramificación es como se muestra en la figura de abajo, notando la imposibilidad de que se use la arista entre 2 y 7 (pues el camino se cerraría antes de recorrer todas las casas).



En total el número de caminos en forma de rehilete es 4 y son: 0-1-6-7-2-3-8-9-4-5-0, 0-9-4-3-8-7-2-1-6-5-0 y sus inversos. El número de caminos en forma de abanico es 10; se pueden contar viendo cuáles de las aristas entre dos casas vecinas no se usan y considerando que hay 2 sentidos (los no usados pueden ser 0-1, 1-2, 2-3, 3-4 y 4-5). Hay 2 caminos que no usan diagonales.

El número total de recorridos es $4 + 10 + 2 = 16$.

Solución 4. Reescribamos la ecuación como sigue:

$$13p = q(4p - 7r - 1).$$

Como p y q son primos, sólo hay dos posibilidades: $q = p$ o $q = 13$.

Si $q = 13$, la ecuación se simplifica a $p = 4p - 7r - 1$, que es equivalente a $3p = 7r + 1$. Aquí notamos que r debe ser par pues, en caso contrario $3p$ sería par, lo que nos daría $p = 2$ (pues p es primo) y vemos que esto es imposible. Otra vez, el único primo par es 2, así que $r = 2$, de donde $3p = 15$ y así $p = 5$.

Si $p = q$, entonces la ecuación se simplifica a $13 = 4p - 7r - 1$, que es equivalente a $14 = 4p - 7r$. Otra vez, r debe ser par, es decir, $r = 2$ y entonces $28 = 4p$, de donde $p = 7$.

Las únicas soluciones son $(p, q, r) = (5, 13, 2)$ y $(p, q, r) = (7, 7, 2)$.

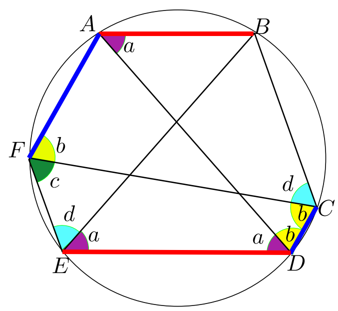
Solución 5. *Primera forma.* Tracemos las diagonales AD, BE y CF. Tenemos que

$$\angle BED = \angle BAD = \angle ADE;$$

la primera igualdad es porque abarcan el mismo arco en el círculo y la segunda es por ser ángulos internos entre paralelas. Llamemos a a estos ángulos. Los mismos argumentos nos dan

$$\angle ADC = \angle AFC = \angle FCD.$$

Llamemos b a estos ángulos. Sean $c = \angle CFE$ y $d = \angle FEB$. Por abarcar el mismo arco, también tenemos que $d = \angle FCB$, pero entonces basta probar que $c = d$ porque CF será una transversal entre las rectas FE y BC y, el tener que los ángulos internos son iguales nos dirá que las rectas son paralelas. Ahora, en el cuadrilátero cíclico $CDEF$ los ángulos opuestos suman 180° así que tenemos $a + b + c = 180° = a + d + b$ y así logramos $c = d$, como queríamos.



Segunda forma. Tracemos las diagonales AD, BE y CF. Como $AB||ED$, tenemos que $\angle ABE = \angle BED$; en otras palabras, tenemos la igualdad de suma de arcos

$$\widehat{AF} + \widehat{FE} = \widehat{BC} + \widehat{CD}.$$

Análogamente, tracemos la diagonal BE y notemos que, por ser $AF||AD$, $\angle ADC = \angle FAD$ y entonces

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{FE} + \widehat{ED}.$$

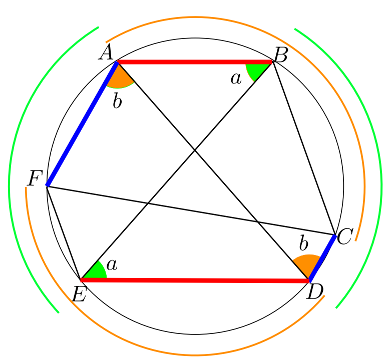
Sumamos las dos ecuaciones:

$$\widehat{AF} + \widehat{FE} + \widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{FE} + \widehat{ED}$$

y cancelamos $\widehat{FE} + \widehat{BC}$ para obtener

$$\widehat{FA} + \widehat{AB} = \widehat{CD} + \widehat{DE},$$

y esto implica que $\angle FCE = \angle EFC$ y entonces $BC||FE$.



Solución 6. *Primera forma.* Trabajemos primero por franjas horizontales (hay 4). En cada una puede haber entre 1 y 4 rectángulos. Solo hay una manera en que sean 4 rectángulos y también sólo hay una manera en que sea 1 solo rectángulo. Sin embargo, hay 3 manera en que la franja horizontal quede partida en 2 rectángulos (escogiendo la línea vertical que los separa) y también 3 maneras en que la franja se parta en 3 rectángulos (escogiendo las 2 líneas verticales que los separan).

Como hay 4 franjas horizontales, debemos ver las posibilidades de sumar 8 con 4 números entre 1 y 4. Las posibilidades son:

$$4+2+1+1,\ 3+3+1+1,\ 3+2+2+1,\ 2+2+2+2.$$

En la primera manera hay que escoger la franja en la que aparecen 4 rectángulos (puede escogerse de 4 maneras) y luego la franja que determina 2 rectángulos (se puede escoger de 3 maneras). Combinando esto, tenemos que las posibilidades en este caso son

$$4 \cdot 3 \cdot 3 = 36.$$

Hacemos lo mismo para la segunda manera: Hay $\binom{4}{2} = 6$ maneras de elegir las 2 franjas que quedan partidas en 3 rectángulos, y en cada una de ellas hay 3 maneras de escoger cómo se parten. Así, en este caso las posibilidades son

$$6 \cdot 3 \cdot 3 = 54.$$

Análogamente, para la tercera manera las posibilidades son

$$4 \cdot \binom{3}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 324.$$

Para la cuarta manera las posibilidades son

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81.$$

Ahora sumamos todos los casos para obtener la respuesta del problema:

$$36 + 54 + 324 + 81 = 495.$$

Segunda forma. Hay 12 segmentos verticales interiores de longitud 1 de los cuales hay que escoger 4. La respuesta es

$$\binom{12}{4} = 495.$$