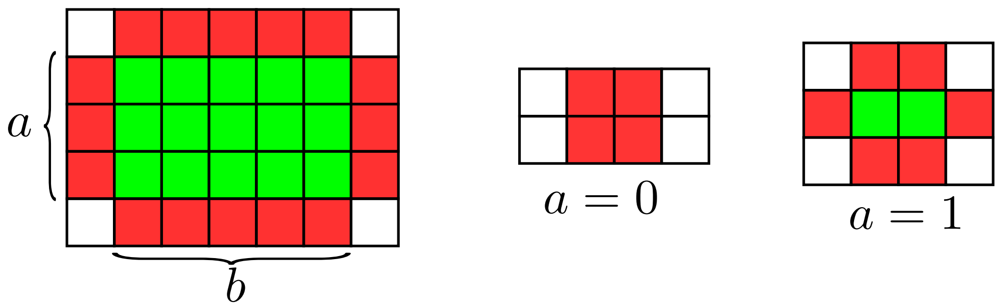
Soluciones para el Examen de la Etapa Final Estatal de la 36ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2022

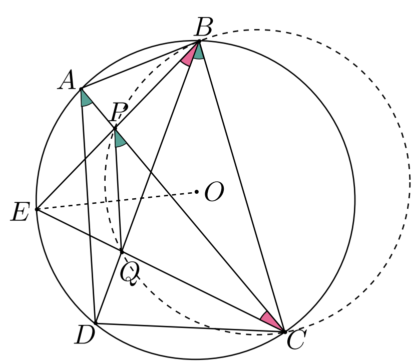
Solución 1. Digamos que la cuadrícula es de tamaño $(a+2) \times (b+2)$ con $1 \leq a \leq b$, de manera que el número de cuadritos que tienen 4 vecinos es ab, y el número de cuadritos que tienen 3 vecinos es $2(a+b)$. Tenemos así que $ab = 2(a+b)$, de donde $(a-2)(b-2) = 4$. Es claro que $a \geq 2$.



Entonces tenemos dos posibilidades: $a - 2 = 1$ y $b - 2 = 4$, en cuyo caso $a = 3$ y $b = 5$ y el número de cuadritos es $5 \times 8 = 40$, o $a - 2 = 2 = b - 2$, en cuyo caso $a = b = 4$ y el número de cuadritos es $6 \times 6 = 36$.

Solución 2. Como AD y PQ son pararalelas y el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, entonces $\angle QPC = \angle DAC = \angle DBC$. Así, también el cuadrilátero $PQCB$ es cíclico. Entonces

$$\angle ACE = \angle PCQ = \angle PBQ = \angle EBD.$$

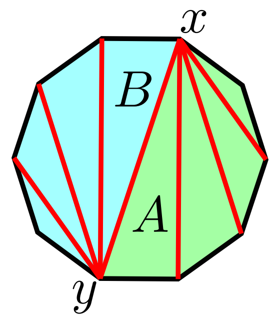


Esto implica que los arcos AE y ED del círculo con centro O que contiene a A, D y E son iguales y de aquí que OE es perpendicular a OE.

Solución 3. Todas las diagonales que unen puntos diametralmente opuestos del polígono se intersectan en el centro del polígono. Son 1011 diagonales, así que al menos se necesitan 1011 colores.

Ahora veamos que 1011 colores son suficientes. Para cada pareja $\{x, y\}$ de vértices diametralmente opuestos pintemos la diagonal que los une con un color; esa diagonal divide al polígono en dos lados A y B. Pintentemos con el mismo color todas las diagonales que van de x a los vértices que quedaron en el lado A y también todas las diagonales que van de y a los vértices del lado B.

En la siguiente figura cómo colorear de manera semejante las diagonales de un polígono de 10 lados.



Solución 4. Notemos que hay 8 posibilidades de acomodar el número 1 y que, una vez puesto el 1, basta escoger un subconjunto de $\{2,3,4,5,6,7,8\}$ distinto de

$$\emptyset, \{2\}, \{2,3\}, \{2,3,4\}, \ldots, \{2,3,4,5,6,7,8\}$$

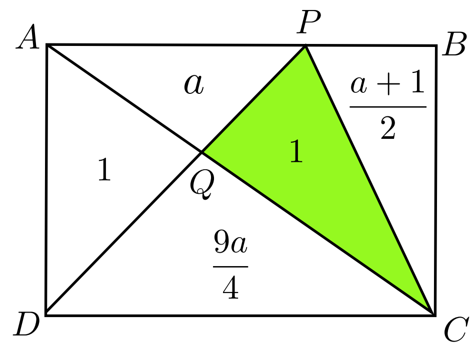
para colocar sus elementos, en orden después del 1 para después colocar los números faltantes a continuación, también en orden (en el ejemplo del enunciado, el conjunto escogido es $\{4,8\}$). La cantidad de esots conjuntos es $2^7 - 8 = 120$, así que la respuesta es $8 \times 120 = 960$.

Solución 5. Digamos que el área del triángulo sombreado es 1; queremos probar entonces que el area de $ABCD$ es 5. Sea Q la intersección de AC con DP. Dado un triángulo KLM denotamos su área por (KLM). Llamemos $a = AQP$. Tenemos que el triángulo AQP es semejante al triángulo CQD en razón $2:3$, así que $(CQD) = \dfrac{9a}{4}$. Sea X el área del rectángulo. Notamos que

$$(AQD) + \frac{9a}{4} = (ADC) = \frac{X}{2} = (DPC) = (PQC) + \frac{9a}{4} = 1 + \frac{9a}{4},$$

de donde $(AQD) = 1$.

También tenemos que $(APC) = 2\,(PBC)$ puesto que $AP = 2\,PB$, y entonces $(PBC) = \dfrac{a+1}{2}$.



Ahora,

$$a+1+\frac{a+1}{2}=(ABC)=\frac{X}{2}=(DPC)=1+\frac{9a}{4}.$$

Resolvemos para obtener $a=2/3$ y de aquí que

$$X=2\left(1+\frac{9\cdot\frac{2}{3}}{4}\right)=2\left(1+\frac{3}{2}\right)=5.$$

Solución 6. Vamos a ver primero que n debe ser múltiplo de 3.

Supongamos que n es tal que sí es posible. Pintemos de negro los cuadros que al principio tienen 1 y de blanco los que al principio tienen 0.

La diferencia entre la suma de los negros y de los blancos al principio es igual a n^2; al final debe ser igual a $-n^2$. Como la diferencia es invariante módulo 3 en cada operación, tenemos que $n^2 \equiv -n^2 \pmod 3$, así que $2n^2 \equiv 0 \pmod 3$, de donde n es múltiplo de 3.

Ahora veamos que para n múltiplo de 3 sí es posible, y que el mínimo número de operaciones necesarias es n^2.

Para esto observemos primero que cada operación toca un cuadro negro y uno blanco, y que cada cuadro negro debe escogerse un número de veces congruente con 2 módulo 3. Como son $\frac{n^2}{2}$ cuadros negros, al menos se necesitan $2\frac{n^2}{2}=n^2$ operaciones.

Para ver que n^2 operaciones son suficientes, observemos primero que el orden en que se hacen las operaciones es irrelevante, y que sólo importa qué parejas de cuadros se escogen. Entonces, dividamos la cuadrícula en grupos de 2×6, y en cada uno de ellos escojamos las parejas de cuadros como se muestra en la figura (marcando con línea gruesa cada vez que esa pareja se escoge).