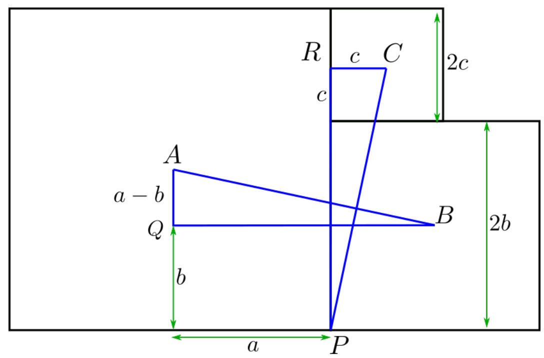
Soluciones de la Etapa Final Estatal de la 35ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2021

Solución 1. Tracemos paralelas a los lados de los cuadrados para formar triángulos rectángulos AQB y CRP, como se muestra en la figura. Bastará probar que estos triángulos son congruentes pues son triángulos rectángulos con los catetos paralelos.

Digamos que el lado del cuadrado con centro en A tiene lado $2a$, el cuadrado con centro en B tiene lado $2b$ y el cuadrado con centro en C tiene lado $2c$. Tenemos así que $2a = 2b+2c$, de donde $a = b + c$ y entonces $|AQ| = a - b = c = |CR|$, y $|RP| = c + 2b = (a - b) + 2b = a + b = |QB|$, y entonces los triángulos AQB y CRP son congruentes por el criterio LAL, como queríamos probar.



Solución 2. Multiplicamos la ecuación por $2xy$ para obtener: $2y + 6x = xy$. Ahora reescribimos la ecuación como $xy - 6x - 2y = 0$. Sumando 12 a ambos lados de la ecuación podemos escribir

$$(x - 2)(y - 6) = 12.$$

Por otro lado, como $\frac{3}{y} > 0$, entonces $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$, de donde $x > 2$ y así $x - 2 > 0$. Análogamente, $\frac{3}{y} < \frac{1}{2}$, y así $y - 6 > 0$. Tenemos entonces 6 posibilidades para las parejas (x, y), dadas por las siguientes posibilidades de factorizar 12:

$x-2$	$y-6$	(x,y)
1	12	$(3,18)$
2	6	$(4,12)$
3	4	$(5,10)$
4	3	$(6,9)$
6	2	$(8,8)$
12	1	$(14,7)$

Solución 3. Para $n = 2$, el conjunto es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, que podemos partir en los subconjuntos $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$, todos con suma 7.

Para $n = 3$, el conjunto es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ que tiene suma 45, así que buscamos partirlo en conjuntos que sumen 15, y una posibilidad es $\{6, 9\}$, $\{7, 8\}$ y $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Ahora procedemos por inducción (avanzando de dos en dos): Sabiendo que para cierta n podemos partir al conjunto $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ en tres conjuntos A, B y C con la misma suma, partamos al conjunto de los primeros $3(n+2) = 3n+6$ enteros positivos:

$$A \cup \{3n+1, 3n+6\},\ B \cup \{3n+2, 3n+5\},\ C \cup \{3n+3, 3n+4\}.$$

Esto termina la inducción.

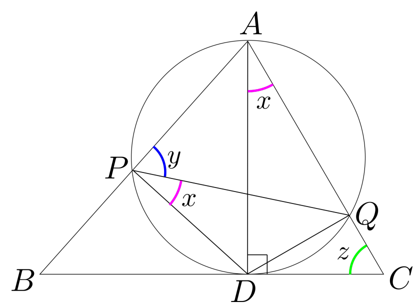
Solución 4. Probaremos que el triángulo APQ es semejante al triángulo ACB. Así tendremos que la razón entre los diámnetros de los círculos circunscritos están en la misma razón que los lados de estos triángulos, es decir,

$$\frac{|AD|}{2r} = \frac{|PQ|}{|CB|},$$

de donde, como AD es altura del triángulo ABC, entonces

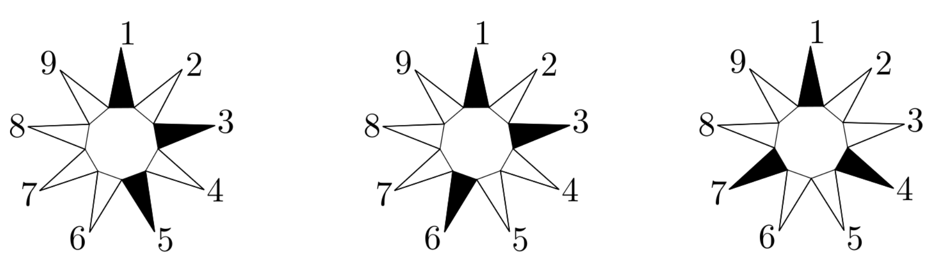
$$(ABC) = \frac{|AD| \cdot |CB|}{2} = |PQ| \cdot r,$$

como queremos probar.



Sean x, y y z los ángulos marcados en la figura. Tenemos que los ángulos marcados con x en la figura son iguales por abarcar el mismo arco del círculo. Sean $y = \angle APQ$ y $z = \angle ACD$, como se indica en la figura. Por ser AD diámetro, se tiene que $x + y = 90°$; pero también $x + z = 90°$ porque en el triángulo ADC el ángulo en D es recto. Así, $y = z$. Con esto, por el criterio AA, se concluye que los triángulos APQ y ACB son semejantes porque los ángulos en A son comunes, y con esto se termina la demostración.

Solución 5. Consideremos los distintas posibles separaciones entre sí de los picos negros.



tipo 1-1-4 tipo 1-2-3 tipo 2-2-2

Para el tipo 1, hay la siguiente 9 posibilidades de elección de los picos negros:

$$(1, 3, 5),\ (2, 4, 6),\ (3, 5, 7),\ \ldots,\ (9, 2, 4).$$

Analicemos, la situación en que $(1, 3, 5)$ son negros. Tenemos que 6 y 8 deben tener el mismo color (lo que nos da 2 posibilidades de elección de su color); además uno de 2 o 4 debe llevar ese mismo color. Así, del tipo 1 hay $9 \times 2 \times 2 = 36$ coloraciones posibles.

Para el tipo 2 hay 18 posibilidades para los picos negros. Son las siguientes:

$$\begin{array}{l} (1, 3, 6),\ (2, 4, 7),\ (3, 5, 8),\ \ldots,\ (9, 2, 5) \\ (1, 8, 5),\ (9, 7, 4),\ (8, 6, 3),\ \ldots,\ (2, 9, 6). \end{array}$$

Analicemos la situación de $(1, 3, 6)$. Los picos con los números 7 y 9 deben tener el mismo color (2 posibilidades de elección del color), y uno de los picos 4 o 5 debe llevar ese color. Así, en este caso las posibilidades son $18 \times 2 \times 2 = 72$.

Para el tipo 3, la elección de los picos negros puede hacerse de 3 formas:

$$(1, 4, 7),\ (2, 5, 8),\ (3, 6, 9).$$

Analicemos el caso $(1, 4, 7)$. La elección del color para el pico con el número 2 puede hacerse de 2 formas. Ahora, hay 4 parejas de picos que pueden llevar ese color, que son:

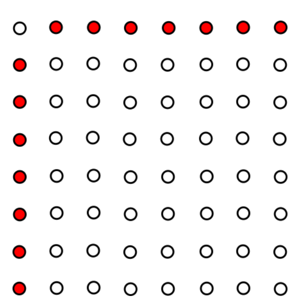
$$(5, 8),\ (5, 9),\ (6, 8),\ (6, 9).$$

Así, de este tipo hay $3 \times 2 \times 4 = 24$ coloraciones posibles.

El total de coloraciones es

$$36 + 72 + 24 = 132.$$

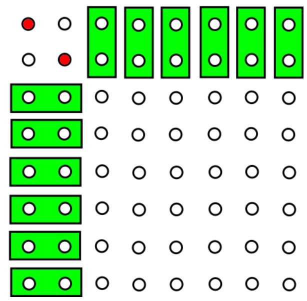
Solución 6. La respuesta es 14. Una forma en que se logran 14 vértices rojos se muestra en la figura siguiente.



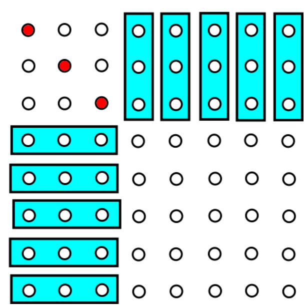
Veamos que no es posible tener 15 vértices rojos. Supongamos que sí y tomemos una configuración con 15 puntos rojos que cumpla las condiciones.

Afirmamos que debe haber dos puntos que no comparten ni columna ni renglón. Para ver esto, usando el principio de las casillas tomemos un renglón que tenga (al menos) dos puntos rojos; digamos, sin pérdida de generalidad, que es el primer renglón, y que esos puntos rojos están en la primera y última columna. Entonces ya no hay más puntos en esas columnas y, como no todos los puntos rojos están en el primer renglón, debe haber otro en algún otro renglón. Sin pérdida de generalidad, supongamos que está en el segundo renglón, segunda columna.

Ahora notamos que en cada uno de los rectángulos verdes señalados en la figura puede haber a lo más un punto rojo pues si hubiera dos en alguno, entonces, junto con los dos puntos rojos de la figura serían vértices de un triángulo rectángulo con vértices rojos.



Hay 12 rectángulos verdes y se han considerado ya 2 puntos rojos. Como estamos suponiendo que hay 15 puntos rojos, debe haber algún punto rojo fuera de los rectángulos (a partir del tercer renglón y tercera columna); sin pérdida de generalidad, está en el tercer renglón, tercera columna. Repetimos ahora el argumento de arriba con los rectángulos azules de la figura: Ahora son 10 rectángulos azules y se han considerado ya 3 puntos rojos, así que debe haber un punto rojo más a partir del cuarto renglón y cuarta columna.



Así sucesivamente, cada punto rojo nuevo que ponemos hace que reduzca en 2 el número de rectángulos y se obtiene la configuración en la que todos los puntos de la diagonal son rojos y entonces no podría haber ningún otro punto rojo más, de manera que sólo se tenrían 8 puntos rojos, y esto es una contradicción.