

# Etapa final Estatal de la 38ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2024

## Primer día

Tiempo límite: 4 horas.

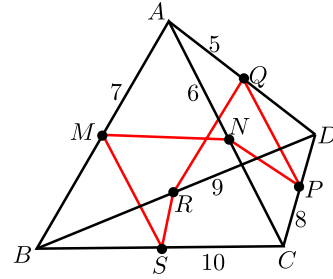
Escribe todos los razonamientos.

No puedes usar calculadora.

Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.

Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de los problemas.

**Problema 1.** En una pirámide triangular  $ABCD$  se tiene que  $AD = 5$ ,  $AC = 6$ ,  $AB = 7$ ,  $CD = 8$ ,  $BD = 9$  y  $BC = 10$ . Los puntos  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  son los puntos medios de las aristas de la pirámide, como se ve en la figura. ¿Cuál es la longitud de la línea hexagonal  $MNPQRS$ ?



**Problema 2.** En el pizarrón están escritos en una fila  $2n$  números sin ningún orden en especial. Lázaro y Domingo van a jugar un juego alternando turnos. La regla del juego es que cada jugador, en su turno, escogerá uno de los dos números que en ese momento estén en la orilla en la fila (o sea, al principio o al final), lo apuntará en su cuaderno y lo borrará de la fila. Esto se repetirá hasta que ya no quede ningún número escrito. Ganará el jugador cuyos números tengan la mayor suma. El primer turno será de Lázaro. Determinar quién de los dos jugadores puede asegurar su triunfo y explicar cómo sería su estrategia.

**Problema 3.** Encontrar todos los enteros  $a$  tales que

$$\frac{16(a^2 - a - 1)^2}{2a - 1}$$

también es entero.

**Problema 4.** ¿Cuántos triángulos tienen un ángulo de  $45^\circ$  se pueden formar escogiendo tres vértices de un polígono regular de 12 lados?

**Etapla final Estatal de la**  
**33ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2024**

Segundo día

*Tiempo límite: 4 horas.*

*Escribe todos los razonamientos.*

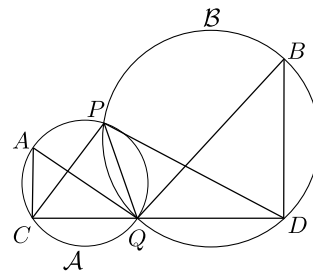
*No puedes usar calculadora.*

*Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.*

*Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de los problemas.*

**Problema 5.** ¿Cuántos números múltiplos de 11 se pueden formar revolviendo las cifras de 123456789? [Nota: Recuerda que un número es múltiplo de 11 si, y sólo si, la diferencia de suma de las cifras en posición impar con la suma de las cifras en posición par debe ser múltiplo de 11, por ejemplo son múltiplos de 11: 2541 (pues  $(2 + 4) - (5 + 1) = 0$ ) y 13948 (pues  $(1 + 9 + 8) - (3 + 4) = 11$ ).]

**Problema 6.** En la figura se muestran dos círculos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  con respectivos diámetros  $AQ$  y  $QB$  de forma que  $\angle AQB > 90^\circ$ ;  $P$  es el otro punto de intersección de los círculos. Una recta por  $Q$  corta a  $\mathcal{A}$  en  $C$  y a  $\mathcal{B}$  en  $D$ . Probar que si  $PQ$  es bisectriz de  $\angle CPD$ , y  $X$  es cualquier punto sobre la recta  $CD$ , entonces  $AQ + QB \leq AX + XB$ .



**Problema 7.** Encontrar todas las ternas de enteros  $(a, b, c)$  tales que  $1 \leq a \leq b \leq c$  y se satisface

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{c+2}.$$

**Problema 8.** En cada uno de los 54 triangulitos de la figura que se muestra a la izquierda debe colocarse un 1 o un 0. ¿Cuál es la mínima suma que puede lograrse si en cada hexágono contenido en la figura y formado por 6 triangulitos debe haber al menos un 1? Ejemplo. En la figura de la derecha se muestra una configuración posible en la que la suma es 12.

