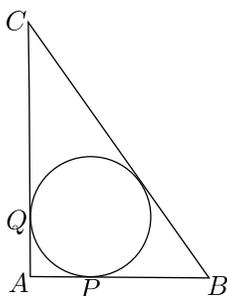


# Examen de la Etapa Final Estatal de la 37<sup>a</sup> Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2023

## Primer día

**Problema 1.** Probar que los números enteros del 1 al 19 se pueden separar en tres conjuntos de tal manera que en ninguno de los tres conjuntos haya 3 elementos cuya suma sea múltiplo de 4, pero que esto no se puede hacer con los números del 1 al 20.

**Problema 2.** En el triángulo rectángulo  $ABC$  (con ángulo recto en  $A$ ), el círculo inscrito toca al lado  $AB$  en  $P$  y al lado  $AC$  en  $Q$ . Si  $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$ , ¿cuánto vale  $\frac{AQ}{QC}$ ?



**Problema 3.** Hay 10 casitas numeradas del 0 al 9 en forma circular alrededor de un lago. En cada casita vive una rana exactamente. La rana Mariana vive en la casa 0. Quiere visitar a todas sus amigas, una vez a cada una y, finalmente, regresar a su casa. Para pasar de una casa a otra debe ir, ya sea a la casa que está al lado (en cualquier sentido) o a la casa opuesta, es decir, a la casa a 5 casas de distancia. Por ejemplo, si está en la casa 3, puede ir cualquiera de las tres casas 4, 2 u 8 que no haya visitado todavía (y sólo a ellas). ¿Cuántos recorridos distintos puede hacer?

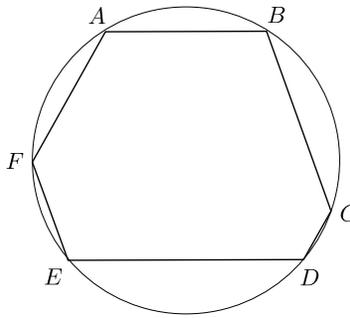
# Examen de la Etapa Final Estatal de la 37<sup>a</sup> Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2023

Segundo día

**Problema 4.** Encontrar todas las soluciones  $(p, q, r)$  de la ecuación siguiente si  $p, q$  y  $r$  deben ser primos (positivos).

$$13p + 7rq + q = 4pq.$$

**Problema 5.** En la figura se muestra un hexágono  $ABCDEF$  con sus vértices en un círculo. Se sabe además que  $AB$  y  $ED$  son paralelos y también son paralelos  $AF$  y  $CD$ . Probar que  $FE$  y  $BC$  son paralelos.



**Problema 6.** El cuadrado de  $4 \times 4$  que se muestra abajo a la izquierda se debe partir en 8 rectángulos. Los rectángulos deben tener sus lados sobre las líneas de la cuadrícula y además sus lados verticales deben tener medida 1. Las dos figuras a la derecha muestran dos posibilidades. ¿Cuántas posibilidades hay en total?

