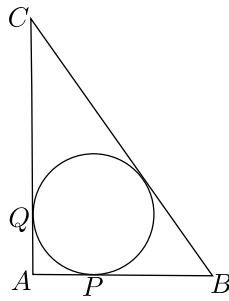


Examen de la Etapa Final Estatal de la 37^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2023

Primer día

Problema 1. Probar que los números enteros del 1 al 19 se pueden separar en tres conjuntos de tal manera que en ninguno de los tres conjuntos haya 3 elementos cuya suma sea múltiplo de 4, pero que esto no se puede hacer con los números del 1 al 20.

Problema 2. En el triángulo rectángulo ABC (con ángulo recto en A), el círculo inscrito toca al lado AB en P y al lado AC en Q . Si $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$, ¿cuánto vale $\frac{AQ}{QC}$?



Problema 3. Hay 10 casitas numeradas del 0 al 9 en forma circular alrededor de un lago. En cada casita vive una rana exactamente. La rana Mariana vive en la casa 0. Quiere visitar a todas sus amigas, una vez a cada una y, finalmente, regresar a su casa. Para pasar de una casa a otra debe ir, ya sea a la casa que está al lado (en cualquier sentido) o a la casa opuesta, es decir, a la casa a 5 casas de distancia. Por ejemplo, si está en la casa 3, puede ir cualquiera de las tres casas 4, 2 u 8 que no haya visitado todavía (y sólo a ellas). ¿Cuántos recorridos distintos puede hacer?

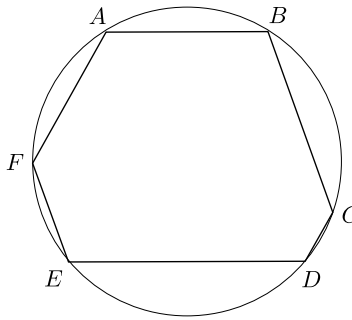
Examen de la Etapa Final Estatal de la 37^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2023

Segundo día

Problema 4. Encontrar todas las soluciones (p, q, r) de la ecuación siguiente si p, q y r deben ser primos (positivos).

$$13p + 7rq + q = 4pq.$$

Problema 5. En la figura se muestra un hexágono $ABCDEF$ con sus vértices en un círculo. Se sabe además que AB y ED son paralelos y también son paralelos AF y CD . Probar que FE y BC son paralelos.



Problema 6. El cuadrado de 4×4 que se muestra abajo a la izquierda se debe partir en 8 rectángulos. Los rectángulos deben tener sus lados sobre las líneas de la cuadrícula y además sus lados verticales deben tener medida 1. Las dos figuras a la derecha muestran dos posibilidades. ¿Cuántas posibilidades hay en total?

