Examen de la Etapa Final Estatal de la 34ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2020

Problema 1. Dada una cuadrícula de $n \times n$ (con $n \geq 2$) se escriben los números del 1 al n^2 en forma espiral de la orilla hacia el centro. Por ejemplo, en el esquema se muestra cómo quedan los números en el caso $n = 5$.

1	2	3	4	5
16	17	18	19	6
15	24	25	20	7
14	23	22	21	8
13	12	11	10	9

Se calcula la diferencia entre la suma de los números que aparecen en las dos diagonales. Por ejemplo, en el caso de un cuadrado de 5×5 la diferencia es

$$(13 + 23 + 25 + 19 + 5) - (1 + 17 + 25 + 21 + 9) - = 85 - 73 = 12.$$

¿Cuánto es diferencia de las sumas de los números en las diagonales en un cuadrado de 2020×2020?

Problema 2. En un pizarrón se encontraba escrito un número de tres dígitos, seguido de $\times$ que denota multiplicación y seguido de otro número de tres dígitos. Si en el pizarrón borramos el símbolo de multiplicación, el número de seis dígitos que queda es justo 3 veces el resultado de la multiplicación original. ¿Cuál es este número de 6 dígitos?

Problema 3. Sea ABC un triángulo. El punto D sobre BC es tal que $|DC| = |AB|$, M es el punto medio de BD y X es el punto sobre AC tal que $\angle XMD = \frac{1}{2}\angle ABC$. Probar que X es punto medio de AC.

Problema 4. Dado un número real positivo a, definimos $f(a)$ como el máximo entre a y $1/a$ (por ejemplo, $f(2/7) = 7/2$, $f(8/5) = 8/5$ y $f(1) = 1$). Encontrar todos los valores positivos de x que satisfacen la ecuación

$$f(4x) \cdot f(18x) = 24x.$$

Problema 5. En un triángulo ABC se tiene que $AB = AC = 20$ y $BC = 18$. D es un punto sobre BC tal que $BD < DC$, E es la relexión del punto C sobre la recta AD, y las rectas EB y AD es intersectan en F. Encontrar el valor de $AD \times AF$.

Problema 6. En un examen se pusieron $2n$ problemas de matemáticas. Un jurado revisó los problemas de forma tal que

(a) Cada juez revisó exactamente n problemas.

(b) Cada problema se revisó por exactamente la misma cantidad de jueces.

(c) Cada pareja de jueces revisó exactamente un problema en común.

¿Cuántos problemas tenía el examen si al menos hubo 2 jueces?