

**Etapa final Estatal de la  
33<sup>a</sup> Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2019**  
Primer día

*Tiempo límite: 4 horas.*

*Escribe todos los razonamientos.*

*No puedes usar calculadora.*

*Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.*

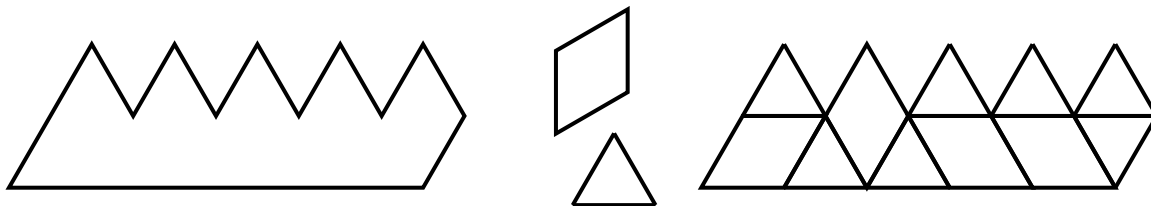
*Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de los problemas.*

1. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir los números enteros del 0 al 9 para hacer una lista de 5 números en orden de menor a mayor, si cada uno de los números es múltiplo de 3 y consta de dos dígitos? (Por ejemplo, una lista posible es (21, 30, 48, 75, 96)).

2. Sea  $\mathcal{C}$  un semicírculo con diámetro  $AB$ . El punto  $C$  está en el diámetro  $AB$  y los puntos  $E$  y  $D$  están sobre  $\mathcal{C}$  de manera que  $E$  está entre  $B$  y  $D$  y  $\angle ACD = \angle ECB$ . Las tangentes a  $\mathcal{C}$  por  $D$  y  $E$  se intersectan en  $F$ . Demostrar que  $\angle EFD = \angle ACD + \angle ECB$ .

3. El conjunto  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  se quiere partir en 3 o más conjuntos de tal manera que las sumas de los conjuntos estén en sucesión aritmética. ¿De cuántas formas es eso posible? [Nota: Como ejemplo, obsérvese que el conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  se puede partir en los 5 conjuntos siguientes  $A_1 = \{5\}$ ,  $A_2 = \{1, 7\}$ ,  $A_3 = \{2, 3, 6\}$ ,  $A_4 = \{4, 10\}$  y  $A_5 = \{8, 9\}$  cuyas sumas son: 5,  $8(= 1 + 7)$ ,  $11(= 2 + 3 + 6)$ ,  $14(= 4 + 10)$  y  $17(= 8 + 9)$  y estos números forman sucesión aritmética porque la diferencia entre dos consecutivos es 3:  $3 = 8 - 5 = 11 - 8 = 14 - 11 = 17 - 14$ .]

4. ¿De cuántas formas distintas se puede construir una figura como la que se muestra abajo a la izquierda usando fichas como las dos que se muestran al centro de la figura? [Nota: Las fichas se pueden girar o voltear como se desee. En la figura, a la derecha, se muestra una forma de construirla.]



# Etapa final Estatal de la 33<sup>a</sup> Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2019

## Segundo día

*Tiempo límite: 4 horas.*

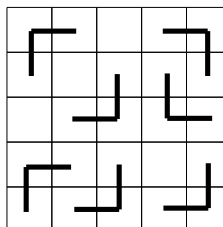
*Escribe todos los razonamientos.*

*No puedes usar calculadora.*

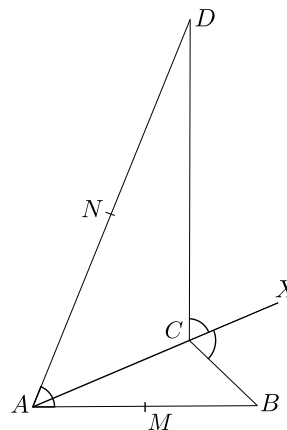
*Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.*

*Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de los problemas.*

5. En una cuadrícula de  $5 \times 5$  se quieren tapar algunos cuadrillos usando fichas en forma de  $L$ 's de 3 cuadrillos como la que se muestra abajo a la izquierda, de manera que ya no quepa una sola más. ¿Cuál es el mínimo número de  $L$ 's que deben usarse? (En la figura de la derecha se muestra un acomodo con 7  $L$ 's en la que ya no cabe ninguna otra.)



6. La figura muestra un triángulo  $ABC$  en el que  $\angle C > 90^\circ$ ,  $X$  es un punto en la prolongación de  $AC$ ,  $D$  es un punto tal que  $\angle BCX = \angle XCD = \angle BAD$ , y  $M$  y  $N$  son los puntos medios de  $AB$  y  $AD$ , respectivamente. Probar que el cuadrilátero  $NAMC$  es cíclico.



7. Un número  $n$  es el resultado de multiplicar dos números enteros positivos cuya diferencia es 9, y también  $n$  es el resultado de multiplicar dos números enteros positivos cuya diferencia es 6. Determinar todas las posibilidades para  $n$ .

8. Sean  $p, q, r, s$  números primos tales que

$$5 < p < q < r < s < p + 10.$$

Demostrar que la suma de estos cuatro primos es divisible entre 60.