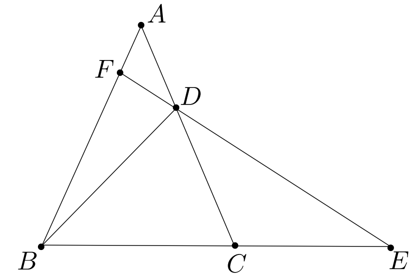
Etapa Final Estatal de la
30ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2016
Primer día

Tiempo límite: 4:30 horas.
Escribe todos los razonamientos.
No puedes usar calculadora.
Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.
Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de los problemas.

1. En la figura, ABC es un triángulo isósceles con $AB = AC$, D es un punto sobre el segmento AC tal que $BD = BC$; E es un punto sobre la recta BC tal que $CD = CE$ y F es el punto de uintersección de las rectas DE y AB. Demostrar que $BF = BC$.

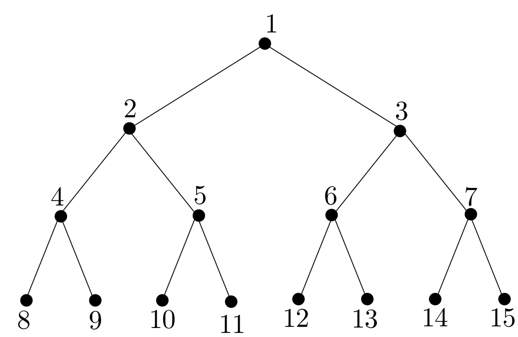


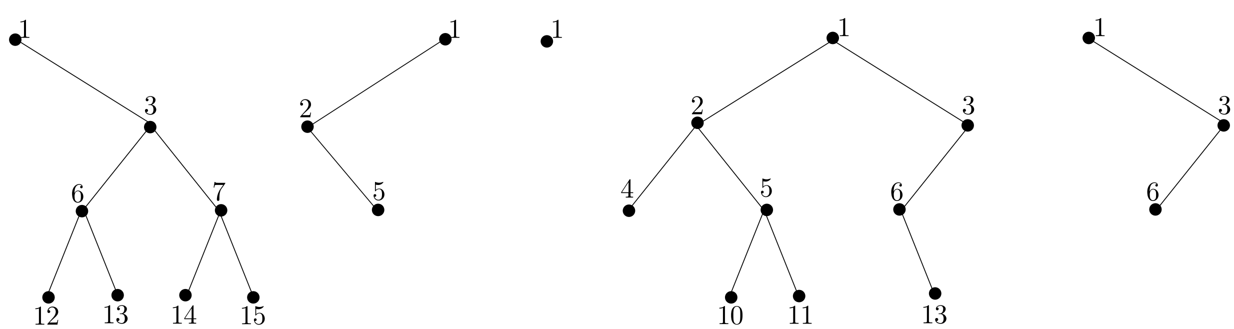
2. Digamos que una sucesión de enteros no negativos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es *consistente* si cumple que

$$\begin{aligned} 0 \leq \ a_i \ &< i, \text{ para toda } i = 1, 2, \ldots, n, \text{ y} \\ a_i \ &\equiv \ a_j \pmod{i} \text{ si } i \,\Big|\, j. \end{aligned}$$

¿Cuántas sucesiones consistentes hay si $n = 12$ y $a_6 = 3$?

3. Una figura como la que se muestra a la derecha estaba formada por bolitas • y palitos \ uniendo las bolitas. Estaba colgada por la bolita con número 1, pero se desprendieron algunos palitos (que podrían ser cualquier cantidad entre 0 y el total) de manera que todo lo que estaba abajo de los respectivos palitos se cayó. ¿De cuántas maneras distintas puede haber quedado la figura? (*Nota:* Abajo se muestran 5 posibilidades diferentes.)

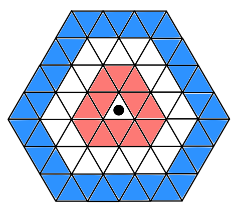


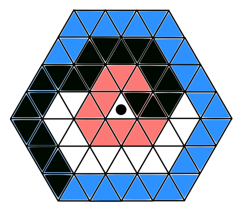


Etapa Final Estatal de la
30ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2016
Segundo día

Tiempo límite: 4:30 horas.
Escribe todos los razonamientos.
No puedes usar calculadora.
Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.
Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de los problemas.

4. En la figura de la izquierda se muestra un triángulo con • en el centro, rodeado por 3 niveles de triángulos. Se construye una figura como la mostrada pero con 7 niveles (en lugar de 3). ¿De cuántas maneras es posible escoger una sucesión de triángulos que empiece en • y termine con un triángulo que tenga un lado sobre la orilla, si la sucesión debe escogerse de tal manera que cada dos triángulos sucesivos en la sucesión tengan un lado en común, que no repita triángulos y que en ningún momento regrese a un nivel anterior? (Por ejemplo, en la figura de la derecha se muestra una posible sucesión de triángulos en el caso de 3 niveles.)





5. Para n natural con $n \geq 2$ sea $b_n = \dfrac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$. Probar que

$$b_2 \times b_3 \times b_4 \times \cdots \times b_{100} = \frac{3367}{5050}.$$

6. En la figura se muestran tres círculos iguales $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$ inscritos en el rectángulo $ABCD$; $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ son tangentes en P, $\mathcal{M}$ pasa por P, T es el punto de $\mathcal{L}$ tal que AT es tangente a $\mathcal{L}$. Probar que A, T y C son colineales.