Etapa Final Estatal de la
27ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2013
Primer día

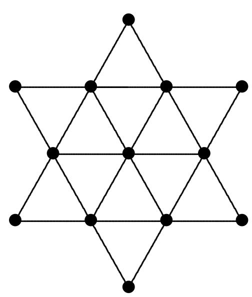
Tiempo límite: 4:30 horas.
Escribe todos los razonamientos.
No puedes usar calculadora.
Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.
Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de los problemas.

1. En un torneo de volibol jugarán 9 equipos; cada equipo jugará una vez contra cada uno de los otros 8. No habrá empates. En cada juego, al ganador se le dará 1 punto y al perdedor 0. Se eliminarán todos los equipos que al final del torneo hayan acumulado 2 puntos o menos. ¿Cuál es la máxima cantidad de equipos que podrán quedar eliminados?

2. Encontrar todas las soluciones de la siguiente ecuación, en la que p, q y r deben ser números primos (positivos):

$$2pq = 7rq + 5q + 3p.$$

3. ¿Cuántos caminos hay que usen las líneas de la siguiente figura y que pasen exactamente una vez por cada uno de los puntos (marcados por $\bullet$)? (Nota: Considerar como distintos dos caminos que usen la misma sucesión de puntos pero en sentido inverso uno del otro).



4. Sea ABC un triángulo rectángulo con $\angle ABC = 90^{\circ}$ y $|AB| = 2|BC|$. Sea D un punto sobre la bisectriz de $\angle B$ tal que $|AD| = |DC|$. Probar que la perpendicular a BD por A corta al segmento DC en su punto medio.

Etapa Final Estatal de la
27ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2013
Segundo día

Tiempo límite: 4:30 horas.
Escribe todos los razonamientos.
No puedes usar calculadora.
Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.
Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de los problemas.

5. ¿Cuál es el menor entero n ($n \geq 3$) con el que si los enteros del 1 al n se separan al azar en tres conjuntos (cada elemento en exactamente uno de los tres conjuntos) entonces se puede asegurar en alguno de los 3 conjuntos hay 3 elementos (distintos) con suma múltiplo de 3?

6. Si $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = 1 - x$, ¿cuánto vale $g(f(\cdots g(f(g(f(2013)))) \cdots))$ en donde g (y también f) se aplica 100 veces?

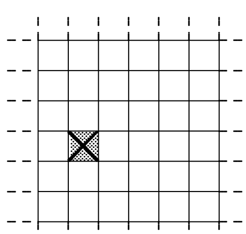
7. Sea ABC un triángulo rectángulo isósceles con ángulo recto en A. Sea D un punto sobre BC tal que $BD = 2DC$ y sea E el pie de la perpendicular de B sobre AD. Determinar el ángulo $\angle CED$.

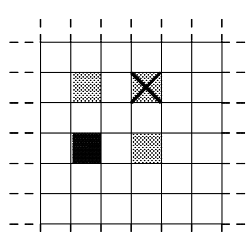
8. En un tablero cuadriculado de 100×100 cuadros todos los cuadritos son inicialmente blancos. En cierto juego, dos jugadores A y B realizan alternadamente la siguiente operación (empieza A): Escoge un cuadrito blanco (de 1×1) y pinta de negro ese cuadro y también todos los cuadros que cumplan cualquiera de las condiciones siguientes:

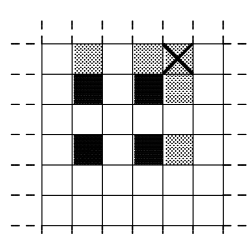
$*$ Que en ese turno sean blancos y que estén en donde se cruzan el renglón del cuadro escogido y la columna de algún cuadro que haya sido previamente pintado de negro.

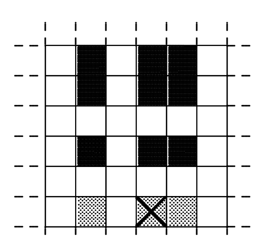
$*$ Que en ese turno sean blancos y que estén en donde se cruzan la columna del cuadro escogido y el renglón de algún cuadro que haya sido previamente pintado de negro.

Como ejemplo, aquí abajo se muestran 4 operaciones sucesivas posibles. Se indica con una cruz el cuadro que se escoge en ese momento y, para ilustrar, se ponen de gris los cuadros que se deben pintar de negro en ese turno.


1ª operación


2ª operación


3ª operación


4ª operación

El juego termina cuando todos los cuadros son negros. Gana el último jugador que pudo escoger un cuadro blanco para pintarlo (junto con los que cumplan la regla descrita). Determinar cuál de los dos jugadores puede asegurar su triunfo si juega correctamente, y decir cómo debe jugar.