22ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
FINAL ESTATAL 2008, Primer día

1. En un triángulo que tiene área 1, sea M el producto del perímetro del triángulo con la suma de las tres alturas del mismo triángulo. Probar que $M > 12$.

2. Encontrar todos los enteros $A \leq 120$ que tienen exactamente 4 divisores y tales que la suma de los divisores es un cuadrado.

3. Dos círculos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ se intersectan en los puntos A y B. Una recta es tangente a ambos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ en los puntos C y D, respectivamente, y las rectas CA y CB intersectan nuevamente al círculo $\mathcal{D}$ en E y F, respectivamente. Sea G el otro punto (distinto de C) en que la recta CD intersecta al circuncírculo de CEF. Probar que D es el punto medio del segmento CG.

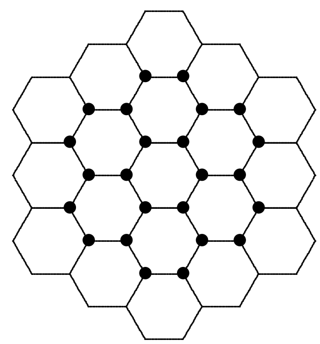
4. En un torneo con $n \geq 3$ competidores cada uno jugó una vez contra cada uno de los demás. No hubo empates y ningún competidor le ganó a todos los demás.

(a) Probar que hubo tres competidores a, b y c tales que a le ganó a b, b le ganó a c y c le ganó a a.

(b) Para cada $n \geq 3$ dar un ejemplo en que sólo haya una terna de competidores $\{a, b, c\}$ con las condiciones del inciso anterior.

22^{a} OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
FINAL ESTATAL 2008, Segundo día

5. Encontrar todos los enteros $n \geq 2$ para los cuales es posible colocar un número entero del 1 al 19 (sin repetir) en cada hexágono de la figura, de manera que en cada uno de los vértices interiores (marcados con $\bullet$ en la figura) la suma de los tres números que queden en los hexágonos que contienen al vértice sea múltiplo de n.



6. En un paralelogramo $ABCD$, sean L, M y N los respectivos puntos medios de los lados AB, BC y CD. Sean P y Q los puntos intersección de AM con DL y con BN, respectivamente. Probar que las áreas de los triángulos APL y BQM son iguales.

7. Unas líneas rectas se dibujan en el plano de manera que entre los ángulos formados se encuentran todos los siguientes 10^{o}, 20^{o}, 30^{o}, 40^{o}, 50^{o}, 60^{o}, 70^{o}, 80^{o}, 90^{o}. ¿Cuál es la menor cantidad posible de rectas?

8. En una cuadrícula con k renglones y 5 columnas (es decir, cada renglón está formado por 5 cuadritos) se escriben los números 1, 2, 3 y 4 de tal manera que en cada renglón aparecen exactamente dos de estos números y todos los renglones son distintos entre sí (por ejemplo un renglón podría ser $(2, 4, 4, 4, 4)$ y otro distinto a él sería $(4, 4, 2, 4, 4)$). ¿Cuál es el mínimo valor de k para el cual se puede asegurar que hay un rectángulo formado por las líneas de la cuadrícula en el que las cuatro esquinas tienen los 4 números?