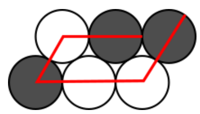
Soluciones del Examen Eliminatorio 2022

1. **(c)** Los números sobre los que pisa Cangu, al dividirlos entre 9, dejan residuo 3, 6, 7, 8 o 9. Entre 82 y 86 el único número que coincide con uno de esos residuos es 84, que al dividirlo entre 9, deja 3 de residuo.

2. **(b)** La tarjeta que conviene elegir para comenzar el número es la que inicia con el dígito más pequeño que, de entre las opciones, es la tarjeta con el 107.

3. **(c)** La medida de cada lado del cubo es igual a seis veces la medida del lado más angosto del ladrillo, es decir, mide $6 \times 4 = 24\,\text{cm}$. Para calcular las otras dimensiones del ladrillo basta notar que la mayor cabe dos veces en un lado del cubo y, entonces, mide $\frac{24}{2} = 12\,\text{cm}$; mientras que la restante cabe tres veces en un lado del cubo y, por tanto, $\frac{24}{3} = 8\,\text{cm}$.

4. **(a)** En la figura se ha trazado una línea indicando como podría quedar el hilo para formar la figura (a).



Veamos que no que no es posible conseguir las otras figuras sin romper el hilo:

- En (b) hay dos cuentas negras que se tocan, lo que no puede lograrse al hacer un círculo con la tira,
- En (c) hay dos cuentas blancas que tocan exactamente una cuenta negra cada una, mientras que en la tira dos de las tres cuentas blancas tocan más cuentas negras,
- En (d) hay una cuenta blanca que solo toca cuentas blancas, mientras que en la tira cada cuenta blanca toca al menos una negra, y
- En (e) la cuenta blanca dibujada hasta abajo forzosamente debería ser un extremo de la tira, pero es imposible doblar el resto para continuar la figura.

5. **(d)** Si en todos los huecos escribimos signos de suma, obtendremos $6+9+12+15+18+21 = 81$. Para obtener 45 debemos cambiar un signo de $+$ por uno de $-$, pero al hacerlo le estaremos restando a la cuenta un número que antes se estaba sumando, o sea que se lo restaremos dos veces a 81. Como $81 - 45 = 36$ y $\frac{36}{2} = 18$, si cambiamos el $+$ entre 15 y 18 por un $-$ obtendremos $6 + 9 + 12 + 15 + (18 - 18) - 18 + 21 = 6 + 9 + 12 + 15 - 18 + 21 = 45$.

6. **(b)** Cada camino tiene 2 árboles de un lado y 3 árboles del otro. Analizando cada uno de los tres caminos, es fácil ver que la única sección que -en todos los casos- queda del lado con 2 árboles es la B.

7. **(e)** El mayor es cuando $a = 9$ y $b = 0$: $9999 - 900 = 9099$. El menor es cuando $a = 1$ y $b = 9$: $1111 - 199 = 912$. La suma de estos dos es $9099 + 912 = 10011$.

8. **(d)** Cada camino está determinado por el lugar en el que se entra al hexágono central, lo cual puede hacerse desde cualquier hexágono blanco salvo el que lleva la Y.

9. **(a)** Para cumplir con las condiciones indicadas, los números que buscamos deben tener tres cifras y comenzar con 1. Las otras dos cifras deben ser números impares, así que tanto la cifra de las decenas como la de las unidades debe tomarse del conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. El total de formas de elegir dos números de ese conjunto es 25.

10. **(d)** Necesitamos sacar vasos de la pila de 8 para que quepa en la repisa. Al sacar 6 vasos, la altura se reduce en $42 - 18 = 24\,\text{cm}$, así que al sacar 1 vaso se reduce en $\frac{24}{6} = 4\,\text{cm}$. Necesitamos reducir $42 - 36 = 8\,\text{cm}$ la pila, así que basta sacar 2 de los 8 vasos y dejar una pila con 6.

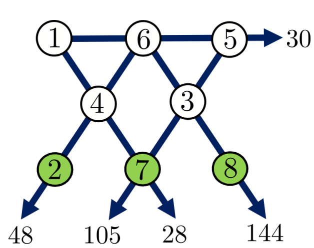
11. **(d)** La longitud del círculo pequeño es 2π. El arco A mide $\frac{3}{8} \cdot 4\pi = \frac{3\pi}{2}$, el arco B mide $\frac{2}{8} \cdot 6\pi = \frac{3\pi}{2}$, el arco C mide $\frac{1}{8} \cdot 6\pi = \dfrac{3\pi}{4}$, el arco D mide $\frac{2}{8} \cdot 8\pi = 2\pi$ y el arco E mide $\frac{3}{8} \cdot 8\pi = 3\pi$.

12. **(d)** Si sumamos los puntos de las caras de todos los dados antes de pegarlos obtendremos $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \times 4 = 84$. Al pegarlos, los dados del centro tienen parejas de lados opuestos que quedan ocultas, así que la suma no debe ser mayor a $84 - 7 - 7 = 70$. Cada dado en un extremo tendrá solamente una cara oculta que podemos elegir convenientemente; si podemos hacer que esa cara tenga 6 puntos tendremos una suma de $70 - 12 = 58$ y no podemos conseguir una menor.

Para ver que sí es posible armar la tira de esta forma, basta con comenzar con un dado en un extremo que deje expuesta la cara con 1 punto y deje la cara con 6 puntos hacia el interior de la tira, para luego ir pegando y haciendo coincidir caras de 6 puntos o de 1 punto según corresponda en cada paso; al hacer el pegado de esta forma, la cara que quedará en el extremo contrario a donde dejamos una cara con 1 punto descubierta tendrá también 1 punto.

13. **(b)** El triángulo cubre un área del $40\,\% + 45\,\% = 85\,\%$ de la unión de las dos figuras, lo que quiere decir que queda el $100\,\% - 85\,\% = 15\,\%$ afuera. El área del círculo que está dentro del triángulo mide el $45\,\%$ de la unión, así que el área del círculo en el exterior representa $\frac{15}{45} = \frac{1}{4}$ del área de todo el círculo, lo que equivale al $\frac{1}{4} \times 100\,\% = 25\,\%$.

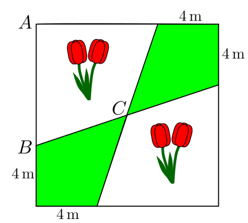
14. **(d)** Como 30 y 105 son múltiplos de 5, el 5 debe escribirse en la intersección de las líneas que marcan esas dos flechas. Análogamente, el 7 debe escribirse en la intersección de las líneas que marcan las flechas con 28 y 105. El número faltante en la línea del 105 debe ser el 3. Como 30 y 48 son múltiplos de 3, pero 3 no está escrito en esas líneas, 6 debe escribirse en la intersección de las líneas marcadas por esas flechas. Esto obliga la posición del 1 y luego la del 4 y la del 2. El esquema queda como sigue:



15. **(d)** La suma de las edades de las tres es $3 \times 10 = 30$. Como la suma de las edades de Ana y Beatriz es $2 \times 11 = 22$, entonces la edad de Carmen es de $30 - 22 = 8$ años. También, como la suma de las edades de Beatriz y Carmen es $2 \times 12 = 24$, entonces la edad de Ana es de $30 - 24 = 6$ años. Finalmente, la edad de Beatriz es de $30 - 8 - 6 = 16$ años.

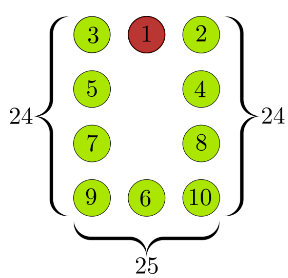
16. **(c)** Cada hora que pasa los relojes se separan por 3 minutos. La primera vez que están a una hora de distancia han pasado 20 horas, mientras que la siguiente vez que eso suceda seguramente habrán pasado más de dos días, lo que indica que puse los relojes en tiempo hace exactamente 20 horas. El reloj que se adelanta ha ganado 20 minutos en total, así que la hora correcta son las $11:40$. Hace 20 horas eran las $15:40$.

17. **(a)** En la figura hemos trazado la diagonal del cuadrado y marcado los puntos A, B y C.



Tenemos que $AB = 12 - 4 = 8\,\mathrm{m}$ y que, en el triágulo ABC, la altura que pasa por C mide la mitad del lado del cuadrado, es decir, $6\,\mathrm{m}$. Luego, el área del triángulo ABC es $\frac{8 \times 6}{2} = 24\,\mathrm{m}^2$. Podemos obtener el área sombreada restándole al área de todo el cuadrado la de los cuatro triángulos que son congruentes con ABC. Así, el área buscada es: $12 \times 12 - 24 \times 4 = 48\,\mathrm{m}^2$.

18. **(e)** La máxima suma posible de los números en las dos columnas y la fila de abajo es $(2 + 3 + \cdots + 10) + (9 + 10) = 73$, que justo es la suma $24 + 24 + 25$. El número que va en lugar del signo de interrogación debe ser el 1. Podemos completar una posible distribución como sigue:



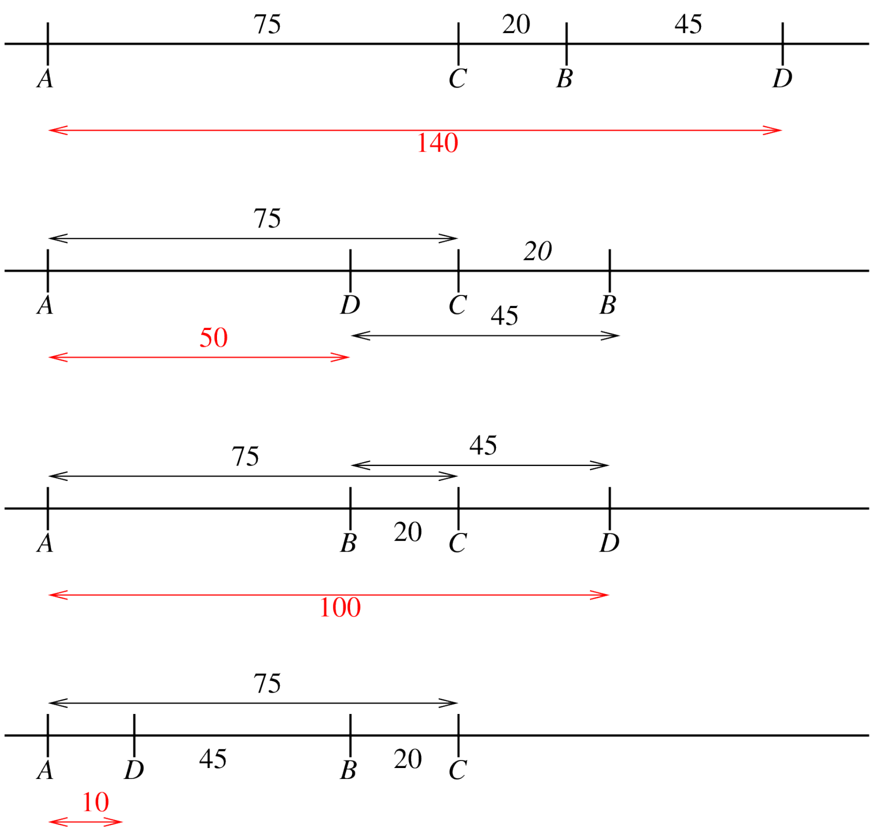
19. **(b)** Si tomamos cada número original de María y lo emparejamos con el que calculó Rita a partir de él, tenemos que el resultado al sumar esos dos números es 7. Si sumamos todas esas parejas, obtendremos la suma del total de números, que sabemos que es $22 + 34 = 56$. Como cada pareja aporta 7 para la suma, en total debe haber $\dfrac{56}{7} = 8$ parejas.

20. **(b)** Supongamos que a y b son los números que irán en los cuadritos según se indica en la figura.

2		4
a		b
?		3

Observemos que la cuadrícula de 2×2 que contiene a 2 y la que contiene a 4 coinciden en los dos números de enmedio, así que para que las sumas sean las mismas a debe ser igual a $b + 2$. Si nos fijamos ahora en la cuadrícula de 2×2 que contiene al número que buscamos y el que contiene a 3, también coinciden en dos números, así que para que las sumas sean las mismas el número que buscamos debe ser igual a $3 - 2 = 1$.

21. **(c)** A continuación se muestran dibujos para cada una de las distancias posibles:



También es posible hacer dibujos invirtiendo el orden en que A y C se encuentran sobre la recta, pero eso refleja las posiciones de los otros puntos y obtiene las mismas cuatro distancias.

Los esquemas se obtuvieron colocando primero A y C a 75 cm y después considerando todas las posibilidades para B de forma que la distancia entre B y C sea 20 cm, primero, y para que D quede a 45 cm de B, después. Haciendo el proceso de forma ordenada es fácil convencerse de que no hay más posibilidades.

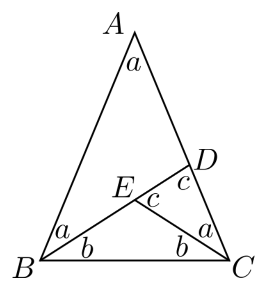
22. **(b)** Afirmamos que el 1 y el 20 deben aparecer diametralmente opuestos. Si no fuera así, en alguna de las dos direcciones el que lleva el número 1 estaría a lo más a 9 lados de distancia del que lleva el número 20, pero $1 + 9 \cdot 2 = 19 < 20$. Al estar diametralmente opuestos, en alguno de los dos sentidos deben aparecer los números pares en orden y en el otro los impares, de manera que hay 2 lados rojos exactamente: entre 1 y 2, y entre 19 y 20.

23. **(e)** Sabemos que en triángulos isósceles, los lados opuestos a ángulos de la misma longitud, son iguales. En la figura se ha usado esto para marcar con la misma letra, ángulos iguales.

En el triángulo BEC, el ángulo externo en E es la suma de los ángulos internos en B yC, es decir, $c = 2b$. Por la misma razón, en el triángulo ABD tenemos que el ángulo externo en D es la suma de los ángulos internos en A y B, o sea que $2a = c$. De las dos ecuaciones anteriores obtenemos $a = b$.

Finalmente en el triángulo ABC sus ángulos suman $180°$ y los ángulos en B y C son iguales, de manera que

$$a = \frac{180°}{5} = 36°.$$

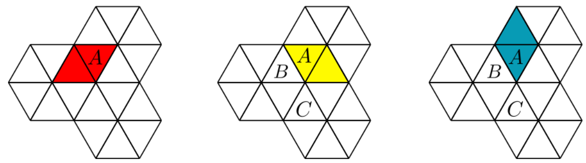


24. **(a)** Si hoy el dragón verde dice la verdad, entonces debe ser jueves, pues es el único día en que se cumple que el día anterior mintió. Si hoy el dragón verde miente, entonces debe ser lunes, pues es el único día en que se cumple que el día anterior dijo la verdad. Análogamente, si el dragón morado dice la verdad, entonces debe ser domingo, pero si dice mentiras, entonces debe ser jueves.

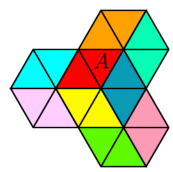
Para que lo dicho por ambos dragones pueda ser consistente, la única posibilidad es que hoy sea jueves

25. **(d)** Usando los cuadrados a la izquierda y el teorema de Pitágoras, tenemos que el cuadrado central tiene área $22 + 3 = 25$. Ahora, usando otra vez el teorema de Pitágoras con el cuadrado central y los de la derecha, tenemos que el que lleva el signo de interrogación tiene área $25 - 8 = 17$.

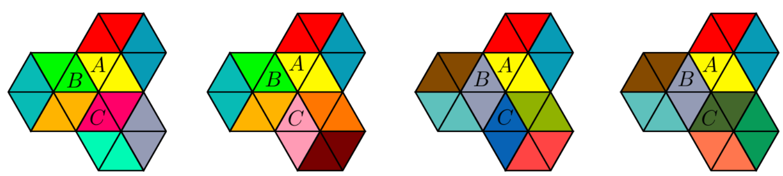
26. **(d)** Hay 3 formas de cubrir el triángulo marcado con la letra A:



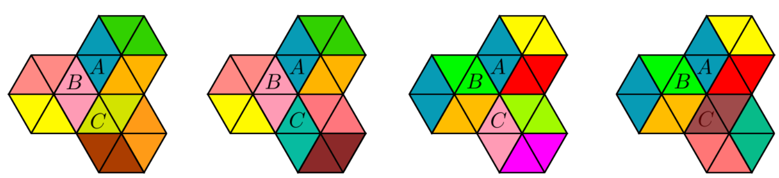
La primera forma sólo tiene una manera de llenarse.



En la segunda forma, hay dos formas de cubrir el triángulo marcado con B y cada una tiene dos formas de completarse de acuerdo a la elección de la cubierta del triángulo C.



De la misma manera, para la tercera elección de la cubierta de A, hay dos formas de cubrir el triángulo marcado con B y cada una tiene dos formas de completarse de acuerdo a la elección de la cubierta del triángulo C.



En total, hay $1 + 4 + 4 = 9$ formas.

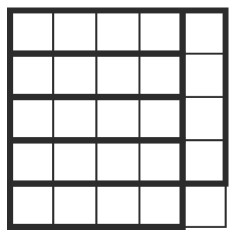
27. **(a)** La mezcla tiene 1 litro extra de azul. Lo mejor que podemos hacer es tirar la mezcla que reduzca en 1 litro el contenido de azul y completar con amarillo. En otras palabras, queremos tirar $\frac{1}{3}$ de azul, así que debemos tirar $\frac{1}{3}$ de la mezcla; es decir, $\frac{5}{3}$ litros.

28. **(d)** Digamos que el otro lado de cada rectangulito es a. Entonces el lado pequeño del rectángulo original es $9a$, el lado más grande del rectángulo original es 9 y de aquí que cada rectángulo mediano tiene lado menor 4. La semejanza entre los pequeños y los medianos nos dice que

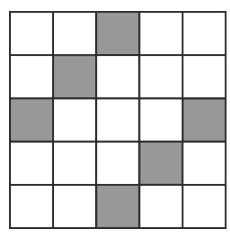
$$\frac{1}{a} = \frac{9a}{4},$$

de donde $9a^2 = 4$ y así $3a = 2$. El perímetro es $2(6 + 9) = 30$.

29. **(b)** Es posible dividir la cuadrícula en 5 rectángulos de 4×1 y 1 de 1×4 que no se intersecten entre sí, como se muestra en la figura. Esto quiere decir que se necesitará al menos un cuadrito sombreado en cada uno de ellos, lo que indica que al menos se tienen que sombrear 6 cuadritos.



De hecho, si sombreamos como se muestra en la siguiente figura, cada vez que tomemos un rectángulo de 4×1 o de 1×4 quedará un cuadrito sombreado en su interior.



Para convencerse de ello es necesario verificar con las 20 posibles posiciones que puede tener un rectángulo de este tipo.

30. **(b)** Dado que cada caja tiene tantas canicas moradas como verdes hay en las otras 6 cajas, contar todas las canicas moradas es lo mismo que sumar 6 veces cada una de las cantidades de canicas verdes que hay en cada una de las 7 cajas. Así, la cantidad de canicas verdes es la sexta parte que la de canicas moradas, es decir hay $\frac{2022}{6} = 337$ canicas.