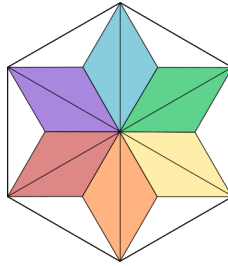


Soluciones del Examen Eliminatorio Estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2021

1s) **Solución 1. (e)** Notamos las partes sombreadas en cada dos sectores opuestos son las contrarias, de manera que justo la mitad de la figura está sombreada y la otra no.

Solución 2. (c) Trazando las líneas que se muestran en la figura, el hexágono queda dividido en 18 triángulos iguales, todos de área $5/2 \text{ cm}^2$, de manera que el área buscada es $18 \cdot (5/2) = 45 \text{ cm}^2$.



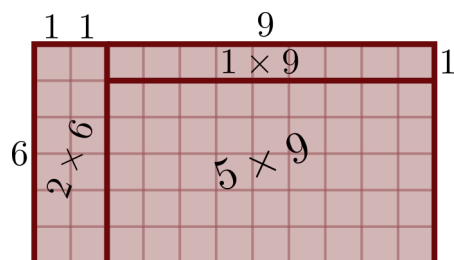
Solución 3. (b) Como los dígitos van creciendo, el dígito más pequeño de los cuatro es el de la izquierda y el más grande es el de la derecha. Si el dígito más pequeño es 1, el número sería 1234; si es 2, el número sería 2345; si es 3, el número sería 3456; si es 4, el número sería 4567; si es 5, el número sería 5678; si es 6, el número sería 6789. El más pequeño no puede ser 7, porque el más grande tendría que ser más grande que 9 y eso ya no se puede. Por lo tanto puedo escribir 6 números distintos.

Solución 4. (e) Tenemos que el orden de estaturas, de la persona más baja a la más alta, es Carmen, Iván, Fernando, Mariana y Elena. La diferencia de estaturas entre Carmen y Elena es de $5 + 10 + 10 + 5 = 30 \text{ cm}$.

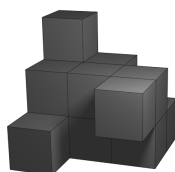
Solución 5. (a) Los recipientes en los que la mitad de arriba es igual a la de abajo se llenan exactamente a la mitad de la altura. El recipiente en forma de cono tiene la parte de abajo más amplia que la de arriba, de manera que se llena a menos de la mitad de la altura. Al recipiente en forma de embudo le pasa lo contrario, es decir, medio litro de agua alcanza una altura por encima de la mitad, así que éste es el correcto.

Solución 6. (e) La segunda vez la jarra tenía $4/5 - 1/5 = 3/5$ de agua extra, y su peso se incrementó por $740 - 560 = 180 \text{ gr}$, de manera que el agua que corresponde a llenar una quinta parte de la jarra pesa $180/3 = 60 \text{ gr}$. Así, la jarra pesa $560 - 60 = 500 \text{ gr}$.

Solución 7. (d) Cada una de las tiras que cortó Víctor tenían 6 cuadros, mientras que la tira que cortó Isabel tenía 9 cuadros. La única forma en que esto pudo suceder es que el chocolate tenga la forma que se muestra en la figura, por lo que el total de cuadraditos de chocolate que quedan es igual a $5 \times 9 = 45$.



Solución 8. (a) La tapa de arriba del cubo grande tiene únicamente un cubito azul, lo cual de inmediato elimina la opción en la que hay 2 cubos azules arriba. De la misma manera observamos que en la capa de enfrente hay dos cubitos azules, uno en la esquina inferior izquierda y el otro en la columna derecha, enmedio, lo cual elimina la opción en la que los cubos de enfrente están todos debajo. Finalmente observamos que en la cara lateral del cubo, los cubos azules aparecen en forma de “Z” y esto ya sólo deja la opción



Solución 9. (b) De la primera suma tenemos que $B + D = 7$ o $B + D = 17$. En el primer caso se debe tener que $A + C = 13$, mientras que en el segundo, $A + C = 12$. En cualquier caso la suma de los números de la derecha debe terminar en 37 y el dígito de las centenas debe ser 8 puesto que se llevaría 1 de sumar $C + A$. Notamos también que, tanto en el caso en que $B + D = 7$ como en el que $B + D = 17$, la suma en las centenas agrega a la de los millares lo mismo que se tenía originalmente al pasar de las unidades a las decenas y, como en los millares hay que sumar también A con C , la suma se completa con 13 a la izquierda, dando finalmente el resultado de 13837.

Solución usando álgebra. De la primera suma tenemos que $10A + B + 10C + D = 137$. La segunda suma se puede desarrollar como : $10^2(10A + D + 10C + B) + (10C + B + 10A + D) = 10^2 \times 137 + 137 = 13700 + 137 = 13837$.

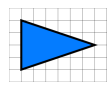
Solución 10. (c) No estamos viendo 3 cubos. Hay 3 posibilidades: que los 3 sean del mismo color (que puede suceder de 3 formas diferentes), que 2 sean de un color y uno de otro (que puede suceder de 6 formas distintas), o que haya uno de cada color (que sólo puede suceder de una manera). En total hay 10 posibilidades.

Solución 11. (b) Si se ponen los palitos pegados formando una fila, sin traslapes, la fila mediría $25 \cdot 10 = 250$ cm, así que la suma de todos los traslapes es de $250 - 190 = 60$ cm.

Hay 24 traslapes en total, así que cada uno de ellos mide $60/24 = 2.5$ cm.

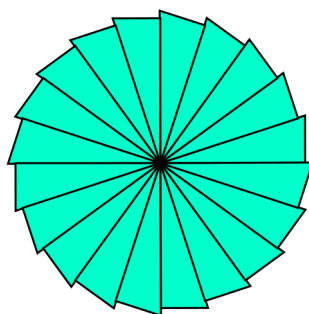
Solución 12. (c) La menor cantidad se obtiene contando los cuadritos del color que abarca menos superficie, que es el blanco, y dividiendo ese número entre el número de cuadritos del color que abarca la mayor superficie, que es el azul. Así, el resultado es $12/32 = 3/8$.

Solución 13. (d) Como los dos triángulos que se muestran son rectángulos, sus áreas son $5 \cdot 4/2 = 10$ y $4 \cdot 4/2 = 8$, y sólo uno es isósceles, el triángulo que buscamos debe ser

isósceles, no rectángulo y de área 8 o 10. La respuesta es  porque es isósceles, tiene área $4 \cdot 4/2 = 8$ y no es rectángulo, mientras que  no es isósceles,  es rectángulo y  tiene área $\frac{4 \cdot 6}{2} = 12$.

Solución 14. (c) Cada lado del cuadrado mayor mide 4 cm, de donde la base de cada triángulo mide $4 - 1 - 1 = 2$ cm, al tiempo que su altura mide $4/2 = 2$ cm. Luego, el área de cada triángulo es $(2 \times 2)/2 = 2$ cm², así que podemos obtener el área de la flor restándole al área del cuadrado mayor las áreas de los cuadrados más pequeños y la de los 4 triángulos. Así, el área buscada es $16 - 4(1) - 4(2) = 4$ cm².

Solución 15. (d) En cada triángulo, el más grande de los ángulos agudos mide $360^\circ/5 = 72^\circ$, así que el más pequeño mide $90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$. La estrella tendrá $360^\circ/18^\circ = 20$ triángulos, y quedará como se muestra en la figura.



Solución 16. (a) Debemos llenar la tabla cuidando que un equipo no juegue dos veces en una misma ronda. Los partidos que incluyen a A y que hacen falta anotar son $A - D$ y $A - F$, que solamente pueden estar en las rondas 4 y 2, respectivamente. Luego, en la ronda 2 el partido faltante debe ser $B - E$, y en la ronda 4 el partido que falta de anotar es $B - C$.

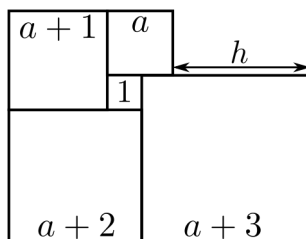
Los partidos que incluyen a E y que hacen falta anotar en este momento son $C - E$ y $D - E$, que solamente pueden estar en las rondas 1 y 5, respectivamente. En la ronda 1 hace falta sólo un partido, que es el encuentro entre D y F , y en la ronda 5 falta anotar el partido $B - F$. A partir de ahí podemos completar todas las rondas de la tabla, como se muestra en la figura y vemos que D y F se enfrentaron en la ronda 1.

1	2	3	4	5
$A - B$	$C - D$	$A - E$	$E - F$	$A - C$
$C - E$	$A - F$	$B - D$	$A - D$	$D - E$
$D - F$	$B - E$	$C - F$	$B - C$	$B - F$

Solución 17. (b) Llamemos c al número de respuestas correctas. Como Guadalupe obtuvo 100 de calificación, entonces $7c \geq 100$, de donde $c \geq 100/7 > 14$. Por otro lado, cada respuesta incorrecta resta 4 puntos y 100 es múltiplo de 4, así que $7c$ debe ser también múltiplo de 4, de donde, a su vez, c es múltiplo de 4. También sabemos que el examen tuvo 20 preguntas, así que las únicas posibilidades para c son $c = 16$ o $c = 20$. Claramente $c \neq 20$. Para $c = 16$, $7c = 112$, de donde tuvo 3 respuestas incorrectas y dejó 1 en blanco.

Solución 18. (b) Dado que cada rueda tiene 10 números y están en orden, al girar 180° , el 0 y el 5 se intercambian, y lo mismo ocurre con el 1 y el 6, con el 2 y el 7, con el 3 y el 8, y con el 4 y el 9. Por lo tanto el número 6348 se convierte en el 1893.

Solución 19. (c) Llamemos a al lado del cuadrado que está encima del más pequeño. Los lados de los otros cuadrados serán $a + 1$, $a + 2$ y $a + 3$, según se indica en la figura. Notamos que la longitud horizontal de la figura se puede calcular como $(a + 1) + a + h$ pero también como $(a + 2) + (a + 3)$. Al igualar éstas tenemos $h = (a + 2 + a + 3) - (a + 1 + a) = 4$.



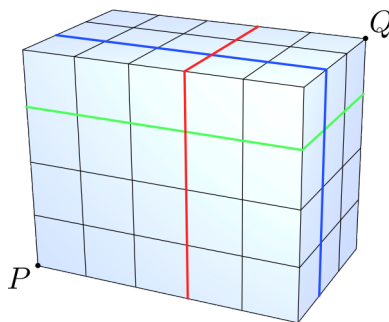
Solución 20. (c) Si Olga va a casa de Cristina pasando por casa de Julio, luego va a casa de Julio pasando por su propia casa y finalmente va de casa de Julio a su casa pasando por casa de Cristina, entonces habrá dado dos vueltas completas al lago y su recorrido habrá sido $1 + 7 + 5 = 13$ Km más que si hubiera dado sólo una vuelta completa al lago; deducimos así que la vuelta completa alrededor del lago es de 13 Km. Así el camino más corto tiene

longitud $(13 - 7)/2 = 3$ Km (los otros caminos miden $(13 - 1)/2 = 6$ Km y $(13 - 5)/2 = 4$ Km).

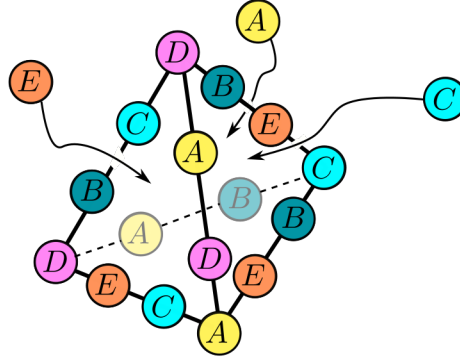
Solución 21. (b) Notamos primero que cada 3 fichas debe repetirse el color; por ejemplo, la cuarta ficha debe tener el mismo color que la primera puesto que ambas llevan el color distinto que las fichas 2 y 3. Esto nos dice también que dos fichas llevan el mismo color si, y sólo si, sus números tienen el mismo residuo al dividirlos entre 3. Así las fichas con los números 2, 20 y 2021 deberían ser del mismo color (pues tienen residuo 2 al dividir entre 3). Como solamente una anotación es incorrecta, concluimos que es la que tiene el número 20.

Solución 22. (d) Las parejas pueden formarse por dos personas que mienten, dos que dicen la verdad o una de cada tipo. La única forma de escuchar que alguien es mentiroso es porque la pareja esté conformada por una persona que miente y otra que dice la verdad, en cuyo caso ambas personas serán llamadas mentirosas. Como se le llamó mentirosas a 20 personas, tenemos que había 10 parejas donde una persona dice mentiras y otra dice la verdad, así que las 1990 personas mentirosas que no participaron en esas parejas deben estar agrupadas entre ellas, dando un total de 995 parejas de este tipo.

Solución 23. (c) Para llegar de P a Q la termita debe atravesar 2 “paredes” hacia atrás, 4 “paredes” hacia la derecha y 3 “paredes” hacia arriba (en la figura se ha resaltado una “pared” en cada una de las direcciones). Cada vez que la termita cruza una pared, cambia de cubo, así que en total pasará por $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ cubos.

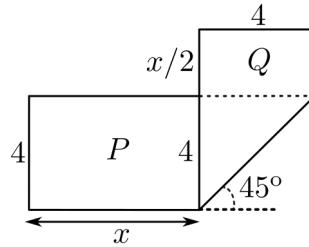


Solución 24. (d) Observemos que las esferas que están en las aristas de la pirámide aparecen en dos caras. Podemos pegarlas en el siguiente esquema:



Notamos entonces que A , C y E aparecen 4 veces (3 en las aristas y una en centro) y B aparece en 4 aristas; sin embargo D sólo aparece en 3 aristas, así que ésta es la respuesta.

Solución 25. (c) Como ambos rectángulos P y Q tienen un lado que mide 4, y el área de P es el doble que la de Q , entonces el otro lado de Q mide $x/2$. Entonces tenemos que $x + 4 + x/2 = 13$, de donde $2x + 8 + x = 26$ y así $3x = 18$ y $x = 6$.



Solución 26. (c) Si la fracción original es a/b , la nueva es $1.4a/b$, de manera que si el denominador se multiplica por $1.4/2 = 0.7$ (es decir, b se reduce un 30 %), entonces se obtiene la fracción $1.4a/0.7b = 2(a/b)$, como se desea.

Solución 27. (b) Si llamamos x al número formado por $ABCDE$, tenemos que $3(2 \cdot 10^5 + x) = 10x + 2$, de donde $x = 85714$. Así, la suma buscada es 25.

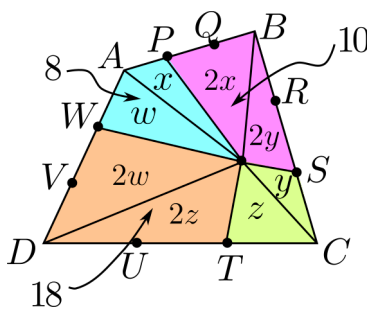
Solución 28. (b) Llamemos R a la cantidad de fichas rojas, V a la cantidad de fichas verdes, A a la cantidad de azules y M a la cantidad de moradas. De la primera condición obtenemos que todas las fichas que no son verdes pueden ser, a lo más, 26, así que $R + A + M \leq 26$. De manera similar tenemos que $V + A + M \leq 24$, $R + V + M \leq 21$ y $R + V + A \leq 16$. Sumando las cuatro desigualdades, tenemos que $3(V + R + A + M) \leq 87$, así que $V + R + A + M \leq 29$. Para mostrar que es posible tener 29 fichas es suficiente con cambiar las desigualdades por ecuaciones y resolver el sistema. Para ello basta restarle a la

ecuación $V + R + A + M = 29$ cada una de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} V &= (V + R + A + M) - (R + A + M) = 29 - 26 = 3, \\ R &= (V + R + A + M) - (V + A + M) = 29 - 24 = 5, \\ A &= (V + R + A + M) - (V + R + M) = 29 - 21 = 8, \\ M &= (V + R + A + M) - (V + R + A) = 29 - 16 = 13. \end{aligned}$$

Solución 29. (d) Si María se quedara con todas las manzanas y José con todas las peras, la condición verdadera sería que María tomó la misma cantidad de peras que José tomó de manzanas, que serían 0 en cada caso. Supongamos que José tiene $x > 0$ manzanas y veamos que María tiene también x peras. Es claro que María debe tener al menos una pera porque si no, no sería cierto que María tiene el doble de frutas que José. Hagamos que María le dé una pera a José y José le dé una manzana a María. Se sigue cumpliendo que María tiene el doble de frutas que José y que María tiene la misma cantidad de peras que José tiene de manzanas. Esto se puede repetir mientras José tenga manzanas. Cuando José termine de dar a María todas las manzanas y María se las intercambie por peras, María ya tendrá todas las manzanas, que son el doble de las peras, así que José deberá tener todas las peras. De esta manera vemos que en un principio María tenía la misma cantidad de peras que José de manzanas.

Solución 30. (c) Unamos todos los puntos A, B, C y D con K . Etiquetemos los vértices como se muestra en la figura y tracemos las líneas que los unen con K . Como los triángulos AKP y PKB tienen la misma altura y sus bases cumplen que $PB = 2AP$, tenemos que el área del triángulo PKB es el doble que el área del triángulo AKP ; llamemos x a esta última. De forma similar etiquetemos las áreas de la figura con las letras y, z y w , como se muestra.



Tenemos entonces que $x + w = 8$, $x + y = (2x + 2y)/2 = 10/2 = 5$, $w + z = (2w + 2z)/2 = 18/2 = 9$, de manera que el área buscada es

$$y + z = (w + z) + (x + y) - (x + w) = 9 + 5 - 8 = 6.$$