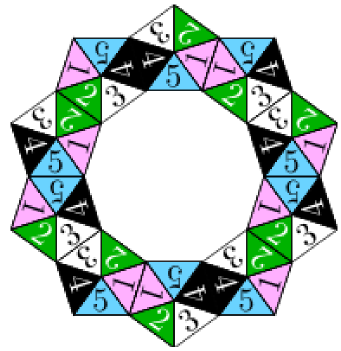
Soluciones del Examen Eliminatorio Estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2020

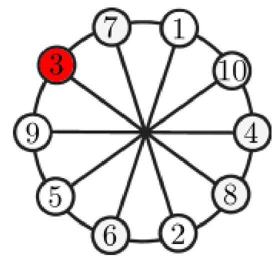
1. **(d)** Como $19 - 12 = 7$, tenemos que sumar 7 a 19 y el vagón es el que lleva el número 26.

2. **(a)** La suma de los resultados es: $24 + 13 + 7 = 44$. La diferencia con 50 es 6, así que lo que restó Karen a cada número es $6/3 = 2$. Los números originales eran: 26, 15 y 9.

3. **(d)** En el sentido contrario a las manecillas del reloj, los números que van quedando adyacentes en cada par de pentágonos son 3, 1, 4, 2, 5, y esto se repite, de manera que en la posición que aparece la X va 4. Se completa la figura como se muestra



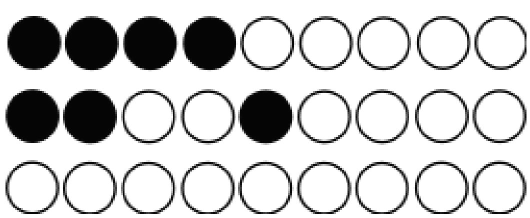
4. **(a)** Vemos que junto al 5 debe ir el 6 porque diametralmente opuestos están los números 1 y 10, que suman 11. Entonces, como $6+2 = 8$, junto al 1 debe ir un 7. Ahora, recorriendo en el sentido de las manecillas del reloj tenemos que junto al 10 debe ir un 4 porque $9 + 5 = 14$. Faltan por colocar el 3 y el 8. Es claro que el 8 debe ir entre el 4 y el 2, y el 3 debe ir en la circulito sombreado. En la figura se muestra el círculo ya con todos los números.



5. **(b)** Los circulitos que tienen 4 líneas son 1, 3 y 4, así que a Fany le corresponde uno de éstos. Por otro lado, el único círculo que tiene exactamente 2 líneas es el que lleva el número 5, de manera que ése le corresponde a Beatriz; a sus dos amigas: Clotilde y Diana, les corresponden los círculos con 1 y 4 (en algún orden). De esta manera vemos que a Fany le toca el número 3 (y a Elisa y a Ana les tocan los números 2 y 6, en algún orden).

6. **(b)** En el objeto sigamos la línea oscura que usa cinco segmentos. Vemos que en el sentido de las manecillas del reloj va de los vértices en la parte más grande, G, a los de la pequeña, P, como sigue: $G - P - P - G - G - G$. La única opción que cumple lo mismo es la (b).

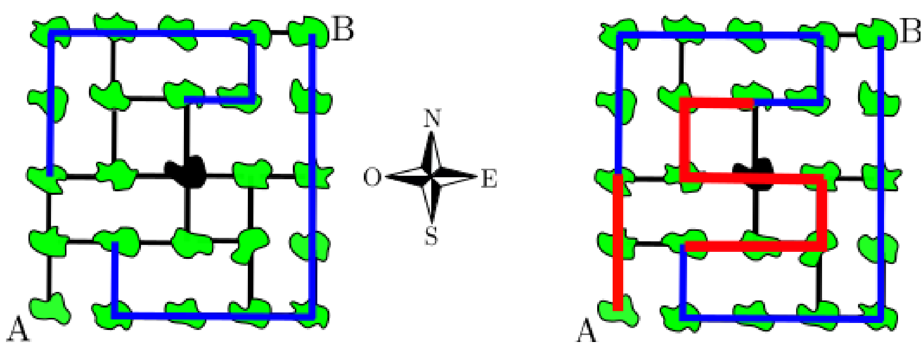
7. **(b)** Es claro que con un solo movimiento no es posible. Sin embargo, si volteamos dos negras y una blanca, nos quedan 6 blancas y 3 negras, de manera que con un solo movimiento más: volteando las negras, logramos que todas sean blancas. En la figura, en el primer renglón se muestra la posición original, en el segundo la posición después del primer movimiento, y tercer renglón la posición después del segundo movimiento.



8. **(b)** Como a y b son menores que 1, su producto es menor que ellos; los únicos que cumplen esto son p y q. Por otro lado, ambos son mayores a $1/2$, así que su producto es mayor a $1/4$ y entonces es claro que debe ser q.

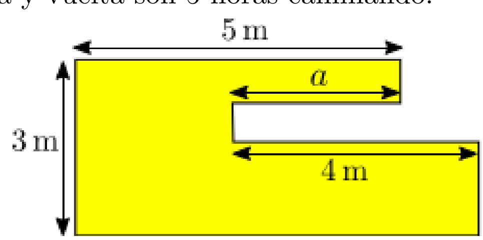
9. **(c)** Lo más que puede haber opuesto al 4 es el 9, y la suma de estas dos caras sería 13; análogamente. , lo menos que puede haber opuesto al 8 es el 1, y esa suma sería 9. Entonces las posibles sumas van del 9 al 13. Sin embargo, para que opuesto al 5 la suma fuera 9, debería haber un 4 que ya está usado y, de la misma manera, para que la suma con 5 fuera 13, el número opuesto al 5 debería ser el 8 que ya está usado. Tampoco es posible que la suma con 5 sea 10, pues debería usarse otra vez el 5. Entonces las posibles sumas son 11 o 12 pero no puede ser 12 porque entonces opuesto al 4 iría el 8 que ya se usó. Deducimos que la suma es 11 y entonces opuesto al 5 va el 6 (también tenemos que opuesto al 8 va el 3, y opuesto al 4 va el 7).

10. **(b)** No se trata del dibujar todo el camino desde el principio sino de analizar porciones del camino que deben ser forzadas. Por ejemplo, hay islas que sólo están conectadas con otras 2, así que el camino a través de ellas está totalmente determinado (aunque no se sepa el sentido ahí). Si marcamos en un dibujo estas porciones, ya es fácil completar todo el camino, como mostramos en la figura.



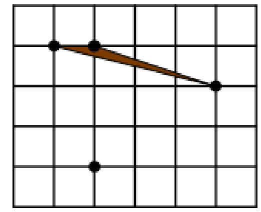
11. **(d)** El camino en autobús en un solo sentido es de media hora; como $3 - \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$, el regreso caminando le toma dos horas y media. Entonces ida y vuelta son 5 horas caminando.

12. **(c)** Las partes verticales del lado derecho miden en total lo mismo que el izquierdo: 3. Por otro lado, si llamamos a a la porción horizontal, como se muestra en la figura, tenemos que la parte horizontal de abajo mide $5+4-a$. El perímetro es $3+3+5+a+4+5+4-a = 24$.

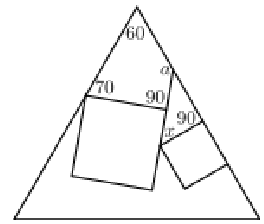


13. **(c)** El cubo tiene 6 caras. Si se pudieran colorear 5 o 6 caras, entonces habría al menos una esquina con sus 3 caras rojas, así que el cubito en esa esquina tendría tres caras rojas, lo cual no es posible. Es claro que es posible lograr que 4 caras sean rojas (quedando opuestas las dos caras no rojas).

14. **(a)** Notamos que, tanto la base como la altura de cualquiera de los triángulos debe medir al menos 1 cm, así que por lo menos el área debe ser de $\frac{1}{2}$. Efectivamente, hay un triángulo que tiene esa área, como se muestra en la figura.



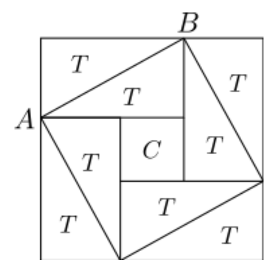
15. **(e)** Prolonguemos uno de los lados de uno de los cuadrados como se muestra. Como cada ángulo de un triángulo equilátero mide $60°$ y la suma de los ángulos de un cuadrilátero es $360°$, el ángulo marcado con a mide $140°$ así que $x + 90° = 140°$, de donde $x = 50°$.



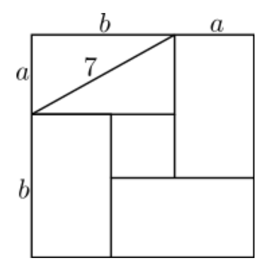
16. **(d)** El primer renglón y la segunda columna comparten un cuadro vacío, de manera que la suma de los que tienen número es la misma y así vemos que en el cuarto renglón y segunda columna debe ir un 1. El mismo razonamiento lo aplicamos al cuarto renglón y cuarta columna para ver que lo que va en el cuadro sombreado debe sumar lo mismo con 1 y 7 que $3 + 8 + 4 = 15$, o sea que en ese cuadro va un 7. Podemos llenar toda la cuadrícula escogiendo cualquier número para el cuadro inferior derecho. Por ejemplo, si escogemos poner ahí un 0 obtenemos la cuadrícula completa que se muestra en la figura.

1	5	6	3
3	2	2	8
4	7	0	4
7	1	7	0

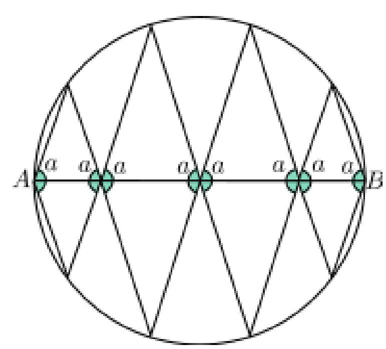
17. **(a)** *Primera forma.* Partamos cada rectángulo a través de su diagonal, como se muestra en la figura. Llamemos T al área de cada uno de los 8 triángulos y C al área del cuadrado pequeño. Por un lado tenemos que las diagonales de los rectángulos forman un cuadrado de área $49\,\text{cm}^2$. Pero el área de este cuadrado se puede calcular de otras dos formas: $4T+C$ y $81-4T$. Al sumar las dos ecuaciones $4T+C = 49$ y $81 - 4T = 49$ obtenemos $81 + C = 98$, de donde $C = 17$.



Segunda forma. Llamemos a y b a los lados del rectángulo, como se muestra. Por el teorema de Pitágoras tenemos que $a^2 + b^2 = 49$. También tenemos que $a+b = 9$. Si elevamos esta ecuación al cuadrado obtenemos el área del cuadrado grande: $81 = (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = 49+2ab$, de aquí que $ab = \frac{81-49}{2} = 16$. Entonces el área del cuadrado chico es $81 - 4ab = 81 - 64 = 17$.

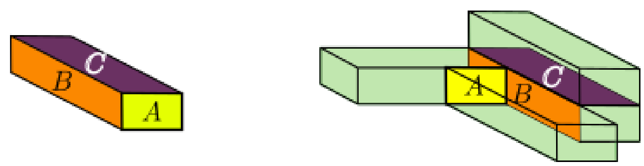


18. **(b)** Reflejemos al figura a través de su diámetro. Tenemos rectas paralelas que forman los mismos ángulos, así que todos los arcos de círculo son iguales. El ángulo buscado es la mitad del ángulo interno en un decágono regular, es decir, $\dfrac{8 \cdot 180°}{2 \cdot 10} = 72°$.



19. **(a)** Notemos que cada 8 posiciones debe repetirse el 10; esto es porque el primero junto con los 6 que le siguen suman lo mismo que esos 6 con el octavo. Pero 8 y 15 no tienen factores en común, así que al ir de 8 en 8 recorriendo, digamos, en el sentido de las manecillas del reloj, abarcamos todas las posiciones. Entonces concluimos que todos los números son iguales a 10. La única suma posible es 150, que no aparece en la lista.

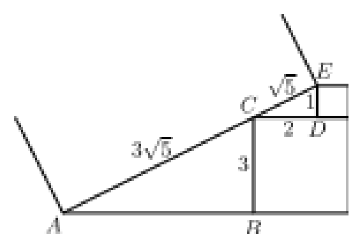
20. **(b)** Digamos que las áreas de las distintas caras de las cajas son A, B y C como se muestra en la figura a la izquierda. A los 4 litros que se necesitarían para pintar todas las cajas si estuvieran separadas hay que restarle las porciones que quedan pegadas. Notamos que son justo una de cada tipo, como se muestra en la figura, así que la respuesta es $4 - 1 = 3$ litros.



21. **(b)** Llamemos x al número. Tenemos que $20 \times 10^{98} < x < 30 \times 10^{98}$, de manera que $400 \times 10^{196} < x^2 < 900 \times 10^{196}$. Ambos extremos de la desigualdad tienen 199 cifras así que también x^2 tiene 199 cifras.

22. **(e)** Es igual a $\dfrac{1010^2 + 2^2 \cdot 1010^2 + 3^2 \cdot 1010^2}{2 \cdot 1010} = \dfrac{(1 + 2^2 + 3^2) \cdot 1010^2}{2 \cdot 1010} = \dfrac{14}{2} 1010 = 7070.$

23. **(b)** Nos fijamos sólo en la la parte plana del frente y llamamos A, B, C, D, E a los vértices de los triángulos que se forman, como se muestra en la figura. Tenemos que BC mide 3 y DE mide 1, de donde CD mide 2. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo CDE obtenemos que CE mide $\sqrt{5}$. Ahora, los triángulos CDE y ABC son semejantes y, como $|BC| = 3\,|DE|$, entonces $|AC| = 3\,|CE| = 3\sqrt{5}$. Entonces el lado del cuadrado grande mide $4\sqrt{5}$.

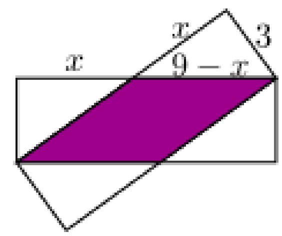


24. **(b)** El número del centro debe ser el promedio de todos, es decir, $2020/101 = 20$. Los extremos son $20 - 50$ y $20 + 50$ así que la suma es $2 \cdot 20 = 40$.

25. **(c)** Digamos que los números en los lados son a, b, c y d, así que los números de los vértices son ab, bc, cd y da. Entonces $15 = ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d)$. Como los números son positivos, las únicas posibilidades para los factores son 3 y 5, de manera que $a + b + c + d = 8$.

26. **(e)** Analizamos cada una de las combinaciones si puede o no pertenecer al conjunto de figuras sin violar ninguna condición:

27. **(d)** Llamenos x a la distancia de un vértice del rectángulo al punto de intersección con el otro, como se muestra en la figura. Entonces, cualquiera de los lados del paralelogramo sombreado mide $9-x$. Por el teorema de Pitágoras, $x^2+3^2=(9-x)^2$, de donde $18x=72$, así que $x=4$. Entonces el área de cualquiera de los triángulos es $3\cdot 4/2=6$ y el área sombreada es $27-2\cdot 6=15$.

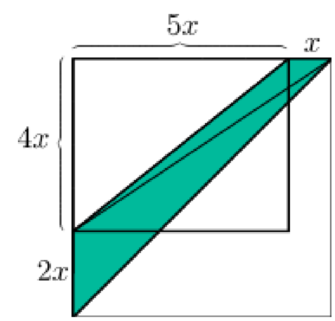


28. **(a)** En total hubo $\frac{10+15+17}{2}=21$ juegos. Como Alicia jugó 10 juegos, quiere decir que descansó en 11 juegos. Sabemos que ninguna descansó en dos juegos consecutivos así que la única posibilidad es que Alicia hubiera descansado en todos los juegos impares, lo cual quiere decir que jugó el segundo juego y lo perdió.

Nota: Una forma en la que se cumplen todas las condiciones se muestra en el siguiente esquema en el que se mendionan las parejas que se enfrentan en cada juego, abreviando A por Alicia, B por Bere y C por Caty.

1) (B,C)	4) (A,B)	7) (B,C)	10) (A,C)	13) (B,C)	16) (A,C)	19) (B,C)
2) (A,B)	5) (B,C)	8) (A,B)	11) (B,C)	14) (A,C)	17) (B,C)	20) (A,C)
3) (B,C)	6) (A,B)	9) (B,C)	12) (A,C)	15) (B,C)	18) (A,C)	21) (B,C)

29. **(d)** Digamos que el lado del rectángulo original que se incrementó en 20 % mide $5x$. Entonces el cuadrado mide $6x$ de lado, así que el otro lado del rectángulo mide $4x$. Partamos la región sombreada en dos triángulos, como se indica en la figura.



Entonces el área sombreada es

$$30=\frac{2x\cdot 6x}{2}+\frac{x\cdot 4x}{2}=\frac{16x^2}{2}=8x^2,$$

de manera que $x^2=15/4$ y así el área del rectángulo original es

$$5x\cdot 4x=20x^2=\frac{20\cdot 15}{4}=75\,\mathrm{m}^2.$$

30. **(c)** Si fuera blanco, habría la posibilidad de que fuera el hexágono, pero entonces Benjamín ya conocería la figura favorita de Rubén desde el principio, porque sólo hay un hexágono. Entonces el color es gris o negro. Pero entonces no puede ser un círculo porque Benjamín en la segunda oportunidad no habría sabido cuál es. Hasta aquí sabemos que es la estrella negra o el triángulo gris o el cuadrado negro. Pero en ese momento Benjamín dice que ya sabe y después Adela dice que también, así que la única posibilidad es que sea el triángulo gris porque si fuera cualquiera de los otros dos, por ser del mismo color, Adela todavía tendría la duda.