Soluciones del Examen Eliminatorio Estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2019

1. **(b)** Como todas las piezas están formadas por 4 cubitos, es más fácil revisar cuántas caras no deben pintarse en vista de que se encuentran pegadas entre sí. En (b) hay 4 pares de caras de este tipo y en todas las demás opciones hay sólo 3.

2. **(d)** Desde atrás, se ve a la izquierda lo que ahora se ve a a la derecha y viceversa. Lo que está arriba se sigue viendo arriba. Fijándonos en la parte superior notamos que (d) es la única opción.

3. **(e)** Salvo en la figura de (e), el área sombreada en todas las demás figuras está formada por triangulitos que van de un lado del rectángulo al lado opuesto, así que en ellas el área sombreada es, a lo más, la mitad del área del rectángulo (en (d) es un poco menos de la mitad; en (a), (b) y (c) es exactamente la mitad). En (e), en vista de que una parte sobreada comprende un rectangulito y éste, junto con los triángulitos, completan una base del rectángulo, el área sombreada es mayor.

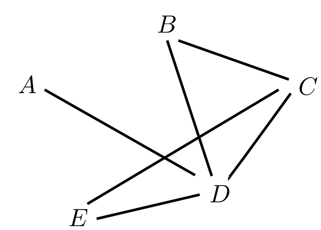
4. **(a)** Observamos que el triángulo que está a la derecha de los triangulitos que miden 1 cm de lado debe medir 2 cm de lado, y lo mismo los dos triángulos a la derecha de éste. Entonces el triángulo grande tiene base 5 cm y, como es equilátero, su perímetro es $3 \times 5 = 15$ cm.

5. **(b)** La diferencia entre 36 y 60 es 24 y, como cada niño contribuye en 2 a la suma, concluimos que el número de niños es 12.

6. **(a)** Como el número total de animales es de 30 y al final hay el mismo número de cada tipo, entonces al final hay 10 gatos. Por otro lado, sabemos que el número de gatos primero incrementa en 6 y luego se reduce en 5, de manera que al final queda sólo uno más que al principio, es decir, el número de gatos al principio era de 9.

7. **(a)** Como Beatriz no lleva sombrero entonces Camilo sí lleva. Si Amanda no llevara sombrero, entonces Beatriz sí llevaría, pero Beatriz no lleva sombrero así que Amanda sí lleva.

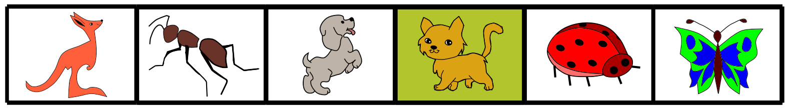
8. **(c)** Como Dora saludó a todos, deducimos que Amira sólo la saludó a ella. Luego, como Constancio saludó a tres, entonces vemos que saludó a todos menos a Amira. Entonces Bernardo saludó a Constancio y a Dora (y a nadie más) y Eric saludó a 2 personas. Podemos poner esto en un esquema, como se muestra.



9. **(d)** Como pesa 400 g cuando está lleno y 100 g cuando está vacío, deducimos que el líquido total pesa 300 g. Entonces la mitad del líquido pesa 150 g que, agregados al peso del recipiente nos dan 250 g.

10. **(a)** En todas las opciones, salvo en (a), Armando mide menos que Diego o que Enrique. En la opción (a) todas las condiciones se cumplen.

11. **(e)** Como el perro está entre el gato y la hormiga, y uno de éstos está junto al canguro, el perro va en la tercera casilla. Como la catarina va entre el gato y la mariposa, entonces es el gato el que va en la casilla sombreada. Las tarjetas quedan como se muestra en la figura:

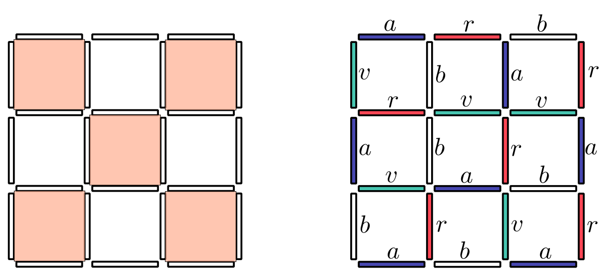


12. **(d)** Cada 10 segundos hay un nuevo animal enfrente; 3 minutos equivale a $180 = 150 + 30$ segundos, así que estará el tercer animal después del caballo, es decir, el flamenco.

13. **(e)** Del segundo renglón tenemos que  vale $\frac{12}{3} = 4$. Entonces deducimos, del primer renglón, que  +  es 11, y así, en el tercer renglón tenemos que  vale $16 - 11 = 5$. Regresamos al primer renglón para deducir que  vale $15 - 4 - 5 = 6$.

14. **(c)** Dividamos el cubo grande en capas: la de enfrente, la central y la de atrás. En la capa de enfrente se quitó sólo un cubito y lo mismo en la capa de atrás; en la segunda capa se quitaron 5 cubitos (pues sólo quedaron los de las esquinas de ese nivel). Quedaron $27 - 1 - 5 - 1 = 20$ cubitos.

15. **(c)** Observemos que los cuadros sombreados en la figura de la izquierda son 5 y no comparten ningún lado, así que al menos se necesitan 5 palitos verdes. En la figura de la derecha se muestra un acomodo con 5 palitos verdes que cumple las condiciones, así que le mínimo es, efectivamente, 5.



16. **(b)** Numeremos los listones de izquierda a derecha y hagamos los primeros pasos:

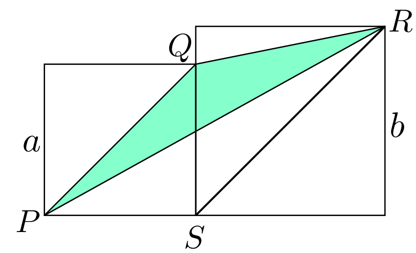
inicio	1	2	3	4	5
paso 1	1	2	5	3	4
paso 2	2	5	1	3	4
paso 3	2	5	4	1	3
paso 4	5	4	2	1	3
paso 5	5	4	3	2	1

Observamos que después de 5 pasos quedan en el orden inverso. Así, cada 10 pasos quedan en el lugar inicial y entonces el paso 2019 es como el paso 9, uno anterior a quedar en orden, y éste tiene el orden 3 1 2 4 5.

17. **(b)** *Primera forma.* A la suma de las áreas de los cuadrados hay que restarles las áreas de los 3 triángulos no sombreados:

$$a^2 + b^2 - \frac{1}{2}(a^2 + (b-a)b + (a+b)b) = \frac{a^2}{2}.$$

Segunda forma. Tracemos la diagonal RS del cuadrado de lado b como se muestra en la figura. Entonces vemos que los triángulos PQR y PQS tienen la misma área (pues tienen la misma base PQ y su altura es la distancia entre las paralelas PQ y SR). El área de PQS es claramente la mitad del área del cuadrado de lado a.

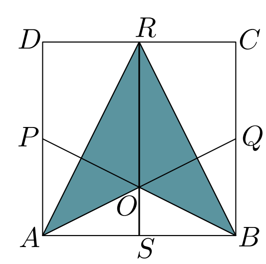


18. **(a)** El primer premio puede darse a cualquiera de las dos personas. Después cada uno de los otros 3 premios tiene probabilidad de $\frac{1}{2}$ de entregarse a la misma persona, así que la respuesta es $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

19. **(c)** El 55 % de 20 es 11, así que al principio había acertado 11 veces. Como el 56 % de 25 es 14, acertó $14 - 11 = 3$ veces en esos 5 tiros.

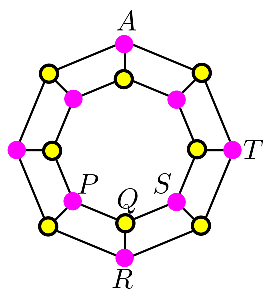
20. **(b)** Podemos observar que, en todos los casos, la vista frontal del líquido es un trapecio con altura el ancho del recipiente. Entonces la diferencia entre la cantidad de líquido está simplemente dada por la diferencia entre la suma de las longitudes de los dos lados paralelos del trapecio. En (a) la suma es $6 + 6 = 12$; en (b) la suma es $9 + 4 = 13$; en (c) es $4 + 8 = 12$; en (d) es $10 + 2 = 12$ y en (6) es $5 + 7 = 12$.

21. **(e)** *Primera forma.* Sea S el punto medio de AB y sea O el punto de intersección de AQ con BP. Por simetría, O está sobre RS. Además, los triángulos AOS y AQB son semejantes y sus lados están en razón $1:2$. Digamos que el cuadrado tiene lado 4; entonces QB mide 2 y OS mide 1. Ahora calculemos el área de los triángulos no sombreados. El triángulo AOB tiene área $\frac{4 \cdot 1}{2} = 2$; ambos triángulos ARD y BRC tienen área $\frac{4 \cdot 2}{2} = 4$. Entonces el área de la parte sombreada es $16 - 2 - 4 - 4 = 6$ y la fracción buscada es $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.



Segunda forma. El área sombreada es igual al área del triángulo ABR menos el área del triángulo AOB, donde O es la intersección de AQ y BP. Además el triángulo ABR tiene la mitad del área del cuadrado. Por otra parte, el rectángulo $ABQP$ también tiene área la mitad del área del cuadrado puesto que P y Q son los puntos medios de AD y BC, respectivamente. Ahora, las diagonales del rectángulo $ABQP$ lo dividen en 4 triángulos de igual área, por lo que el área de ABO es $1/4$ del área del $ABQP$ y, por lo tanto $1/8$ del área del cuadrado. Finalmente, el área sombreada es $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

22. **(c)** Coloreemos los vértices de la figura con dos colores de forma tal que los extremos de cada segmento tengan distinto color, como se muestra en la figura. Notamos entonces que todo camino alterna colores y, como 2019 es impar y el camino inicia en A, entonces sólo puede terminar en un vértice con distinto color que A, así que la única posibilidad es Q. Para ver que sí es posible llegar en 2019 pasos hay muchas posibilidades; una de ellas es llegar de A a Q directamente en 5 pasos y después moverse de Q a S alternadamente hasta completar los 2019 movimientos.



23. **(d)** Digamos que las cantidades de personas en los 5 primeros vagones son a, b, c, d y e, en ese orden. Como $a + b + c + d + e = 199$ pero también del segundo vagón al sexto hay en total 199 personas, el sexto vagón tiene a personas. De la misma manera deducimos que el séptimo tiene b personas y así sucesivamente, como se muestra en el esquema.

$$a\;b\;c\;d\;e\;a\;b\;c\;\underbrace{d\;e}\;a\;b\;c\;d\;e\;a\;b\;c$$

Ahora, entre los 15 primeros vagones hay $3 \cdot 199 = 597$ personas, así que en los tres últimos hay $700 - 597 = 103$ personas, es decir, $a + b + c = 103$ y entonces $d + e = 199 - 103 = 96$, y ésta es la cantidad de personas en los dos vagones centrales.

24. **(c)** La suma de los 7 dígitos es $3a + 4b$. El número de dos dígitos $\overline{ab}$ se puede escribir como $10a + b$. Entonces tenemos que $3a + 4b = 10 + b$, de donde $3b = 7a$. Como a y b son dígitos, entonces $a = 3$ y $b = 7$, de donde $a + b = 10$.

25. **(d)** Como todas las cajas tienen la misma cantidad de manzanas, entonces 60 es divisible entre el número de cajas. La suma de 12 o más enteros distintos es, al menos, $0 + 1 + 2 + \cdots + 11 = 66$, así que el número de cajas es menor a 12. El siguiente divisor de 60 menor que 12 es 10, y sí es posible lograr la condición con los siguientes números de peras para las cajas: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 15$.

26. **(e)** Digamos que los lados del recipiente miden a, b y c metros. Entonces $2ab = 3bc = 5ac = 120$, así que $ab = 60$, $bc = 40$ y $ac = 24$. Multiplicando las tres igualdades obtenemos $(abc)^2 = 24^2 \cdot 10^2$, de donde $abc = 240$.

27. **(c)** Tenemos que $6 = n - (n-6)$ y, como $n-6$ es divisor de n y de sí mismo, tenemos que $n-6$ es divisor de 6. Entonces las posibilidades para $n-6$ son 1, 2, 3 y 6; de donde las posibilidades para n son 7, 8, 9 y 12. Ahora revisamos en cada una de éstas si $n-6$ es el mayor divisor de n, lo cual sólo ocurre para 7, 9 y 12.

28. **(a)** Sabemos que $4 < \sqrt{20} < 5$, así que $24 < 20 + \sqrt{20} < 25$, de donde $4 < \sqrt{24} < \sqrt{20+\sqrt{20}} < \sqrt{25} = 5$, es decir, $4 < \sqrt{20+\sqrt{20}} < 5$ Repitiendo esto obtenemos que el mayor entero menor o igual que la expresión dada es 4.

29. **(b)** Digamos que los números escogidos son $a < b < c$. Para que b sea el promedio de a y c es necesario y suficiente que a y c sean ambos pares o ambos impares y entonces b está determinado: $b = \dfrac{a+c}{2}$ (notando que, si $a \neq c$, entonces también b es distinto de a y de c). Entonces las posibilidades son $2 \cdot \binom{5}{2} = 2 \cdot 10 = 20$ pues hay 5 números pares y 5 impares.

30. **(e)** Construyamos el rectángulo $BFEG$ como se muestra. Entonces la diagonal del cuadrado $ABCD$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo BDG así que, por el teorema de Pitágoras, $DB^2 = 7^2 + 1^2 = 50$. Otra vez, por el teorema de Pitágoras, si llamamos x al lado del cuadrado, tenemos que $x^2 + x^2 = 50$, de donde $x = 5$.