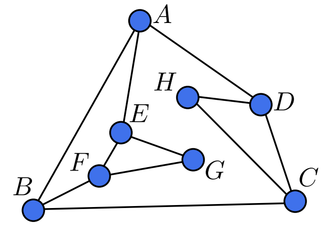
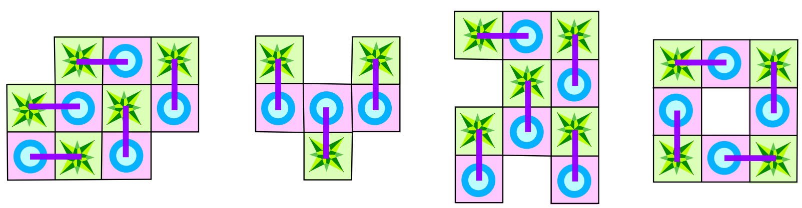
Soluciones del Examen de Nivel I, 2018

1. **(a)** El perímetro del triángulo original es $6 + 10 + 11 = 27$, así que cada lado del triángulo equilátero mide $\frac{27}{3} = 9$.

2. **(e)** Etiquetemos los focos como se muestra en la figura. Los focos G y H tienen solamente dos vecinos, lo que implica que debe tocarse un foco en cada uno de los triángulos en los que ellos se encuentran. Entonces se tienen que tocar dos focos o más. Por otro lado, bastan 2 focos porque es fácil verificar que tocando E y C es posible encender todos los focos.



3. **(d)** La segunda figura es imposible puesto que tiene 8 estrellas y sólo 6 círculos. Las demás son posibles y en el dibujo aquí abajo se ha esquematizado cómo lograrlo poniendo una línea sobre la ficha.

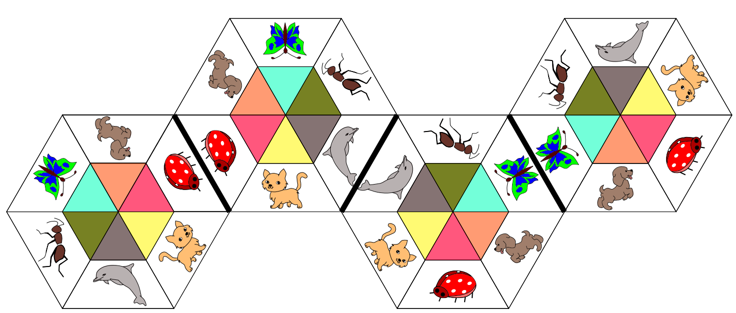


4. **(c)** El lado mayor del rectángulo grande mide 20 cm, que equivale a cinco veces la longitud del lado menor de cada rectángulo pequeño; así, el lado menor de cada rectángulo pequeño mide 4 cm. El perímetro del rectángulo grande mide $6 \times 10 + 4 \times 4 = 76$ cm.

5. **(a)** Escribamos A, B y C en lugar de los números tachados, de forma que la operación quede $A3 \times 2B = 3C2$, donde debemos sustituir A, B y C por dígitos. Observemos que la única posibildidad para que el resultado de la multiplicación termine en 2 es sustituir B por 4. Como el único múltiplo de 24 entre 300 y 399 es 312, tenemos que C debe sustituirse por 1. Finalmente, A debe sustituirse por 1 para que la operación esté correcta. La suma de los números tachados es $4 + 1 + 1 = 6$.

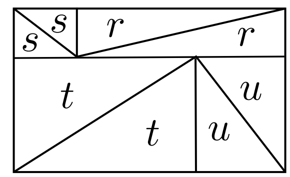
6. **(c)** La longitud del lado del cuadrado mediano es de $6 + 2 = 8$ cm. La longitud del lado del cuadrado más grande es de $8 + 6 - 2 = 12$ cm.

7. **(b)** Se muestra en la figura cómo quedan las reflexiones.



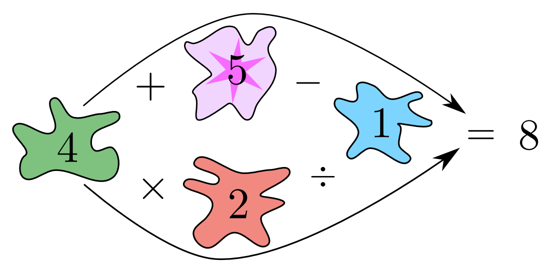
8. **(d)** Para lograr en un principio el mismo número de hombres que de mujeres hacen falta 8 mujeres. Así habrá 38 personas. Como debe haber 8 equipos, el número de personas debe ser múltiplo de 8, pero $\frac{40}{8} = 5$ así que no podría haber el mismo número de hombres que de mujeres. Entonces deben juntarse 48 personas y así en cada uno de los 8 equipos quedarían 3 hombres y 3 mujeres. Entonces faltan $48 - (19 + 11) = 18$ personas (5 hombres y 13 mujeres).

9. **(b)** Dividiendo la figura como se muestra, es fácil ver que la región sombreada es igual a la región blanca (los triángulos marcados con las mismas letras son iguales). Así, el área del rectángulo es el doble que la suma de las áreas de los triángulos, es decir, es $20\,\text{cm}^2$.



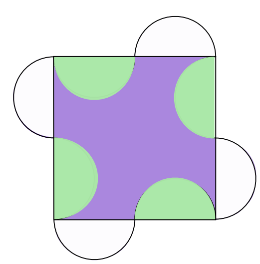
10. **(c)** Las únicas posibilidades para dividir el rectángulo es generar cuadrículas de 1×40, 2×20, 4×10 y 5×8, donde una de las dimensiones es la cantidad de renglones y la otra la cantidad de columnas. Como la cantidad de columnas debe ser impar y mayor que 1, la única posibilidad es que se haya dividido en 5 columnas y 8 renglones. De esta manera, tenemos que Sunya iluminó una columna con 8 cuadritos.

11. **(e)** El número que se resta debe ser 1 o 2 porque la suma máxima de dos números entre 1 y 5 es $5 + 5 = 10$. Por otro lado, el número arriba a la izquierda no puede ser 5, porque al multiplicar 5 y luego dividir no podría obtenerse 8. Entonces la única posibilidad es que el número que se resta sea 1 y que la operación arriba sea $4 + 5 - 1 = 8$. La figura completa queda como se muestra en la figura y la respuesta es 5.



12. **(b)** La diagonal AC divide al cuadrilátero $AMCN$ en dos triángulos iguales. Así, el área del triángulo ANC es la mitad del área de NBC. Como ambos triángulos tienen la misma altura desde C, AN debe medir la mitad de NB. Dado que AB mide 3, tenemos que $NB = 2$.

13. **(e)** Moviendo medios círculos como se muestra en la figura formamos un cuadrado de lado $4\,\text{cm}$. El área es $16\,\text{cm}^2$.



14. **(c)** Si la afirmación de la primera puerta es verdadera también lo es la de la segunda, lo cual no puede suceder. Luego, el león no está tras la primera puerta. Como sabemos que la tercera afirmación es falsa, la segunda debe ser la verdadera. De lo anterior deducimos que el león no está tras la segunda puerta. La única posibilidad es que el león esté tras la tercera puerta.

15. **(d)** Dado un círculo, la distancia de su centro a cada uno de los lados del rectángulo que toca es la medida de su radio, que resulta ser $\frac{7}{2}$. Entonces, la distancia entre los centros mide $11 - 2 \cdot \frac{7}{2} = 4$.

16. **(d)** Como ningún número primo termina en 4, uno de los números de la lista debe ser de dos cifras y empezar con 4, es decir, debe ser 41 o 43. Si 43 está en la lista, con los números restantes no hay posibilidad de escribir ningún número primo que contenga al 1 porque 21 y 51 no son primos, y 31 repetiría el 3 con 43. Así, 41 debe estar en la lista, y ésta se puede completar, por ejemplo, con 2, 3 y 5.

17. **(c)** Si sumamos todos los resultados de los renglones y todos los resultados de las columnas obtendremos dos veces la suma de los números del 1 al 9, es decir, 90. Como entre los 5 resultados que se mencionan la suma es 71, el resultado faltante debe ser 15. En la figura se muestra un posible acomodo en el que aparecen las sumas mencionadas.

1	8	7
3	5	6
9	4	2

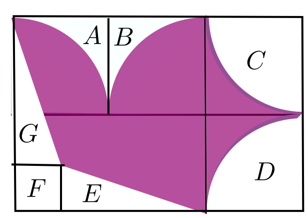
18. **(d)** *Primera forma.* Cada persona hace 75 llaveros en 9 horas, de manera que cada hora hace $\frac{75}{9}$ llaveros. Entonces 6 personas logran $\frac{6\times 75}{9} = 50$ llaveros por hora. Para producir 300 llaveros necesitan trabajar 6 horas.

Segunda forma. El número de personas se incrementó en 50 %, de manera que el número de horas debe reducirse de manera que al aumentar 50 % sea 9, así que es 6 (pues $\frac{9}{1.5} = 6$).

19. **(e)** Juntos gastaron $15\,\% + 100\,\% + 160\,\% = 275\,\%$ de lo que gastó Joaquín. Así, Joaquín gastó $\frac{5{,}500\times 100}{275} = 2,000$. Como Armando gastó el 60 % más, gastó \$3,200.

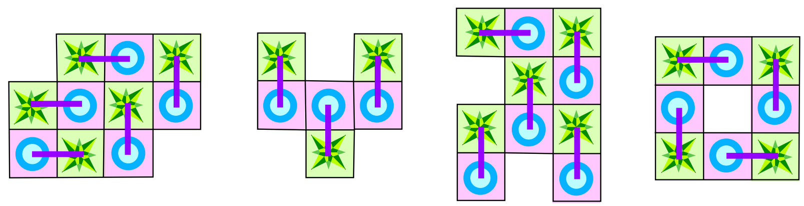
20. **(b)** Tere recorrió $6 \times 50 = 300\,\text{m}$. Miguel recorrió el triple, o sea, 900 m. Como Miguel dio cinco vueltas a la alberca, recorrió 10 veces la suma del largo y el ancho de la alberca. Así, el ancho de la alberca es $\frac{900}{10} - 50 = 40\,\text{m}$.

21. **(a)** En la figura, las regiones A y C tienen juntas la misma área que 4 cuadritos. Lo mismo pasa con las regiones B y D. Las regiones G y E, juntas, tienen la misma área que 3 cuadritos. Así, el área que no está sombreada es igual al área de $4+4+3+1 = 12$ cuadritos. Luego, el área sombreada debe ser igual al área de $24 - 12 = 12$ cuadritos. Así, el rectángulo tiene el doble de área que la región sombreada, es decir, $384\,\text{cm}^2$.



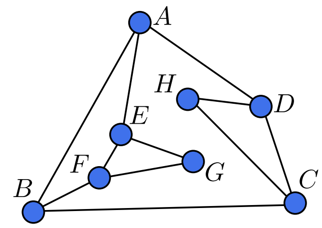
Soluciones del Examen de Nivel II, 2018

1. **(d)** La segunda figura es imposible puesto que tiene 8 estrellas y sólo 6 círculos. Las demás son posibles y en el dibujo aquí abajo se ha esquematizado cómo lograrlo poniendo una línea sobre la ficha.



2. **(c)** Si la afirmación de la primera puerta es verdadera también lo es la de la segunda, lo cual no puede suceder. Luego, el león no está tras la primera puerta. Como sabemos que la tercera afirmación es falsa, la segunda debe ser la verdadera. De lo anterior deducimos que el león no está tras la segunda puerta. La única posibilidad es que el león esté tras la tercera puerta.

3. **(e)** Etiquetemos los focos como se muestra en la figura. Los focos G y H tienen solamente dos vecinos, lo que implica que debe tocarse un foco en cada uno de los triángulos en los que ellos se encuentran. Entonces se tienen que tocar dos focos o más. Por otro lado, bastan 2 focos porque es fácil verificar que tocando E y C es posible encender todos los focos.

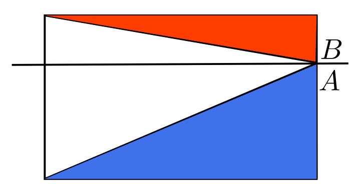


4. **(c)** El lado mayor del rectángulo grande mide 20 cm, que equivale a cinco veces la longitud del lado menor de cada rectángulo pequeño; así, el lado menor de cada rectángulo pequeño mide 4 cm. El perímetro del rectángulo grande mide $6 \times 10 + 4 \times 4 = 76$ cm.

5. **(c)** Si sumamos todos los resultados de los renglones y todos los resultados de las columnas obtendremos dos veces la suma de los números del 1 al 9, es decir, 90. Como entre los 5 resultados que se mencionan la suma es 71, el resultado faltante debe ser 15. En la figura se muestra un posible acomodo en el que aparecen las sumas mencionadas.

1	8	7
3	5	6
9	4	2

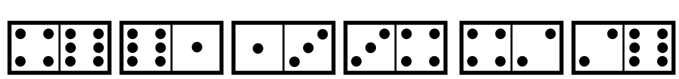
6. **(a)** Como el área de un triángulo sólo depende de las medidas de su base y altura, podemos mover A y B a uno de los lados del rectángulo de manera que coincidan (ver la figura). Entonces es claro que la suma de las áreas de los triángulos es la mitad que la del rectángulo, de manera que el área del rectángulo es $20\,\text{cm}^2$.



7. **(c)** Los únicos puntos que aparecen una cantidad impar de veces son 4 y 6, así que esos deben ser los extremos de la cadena de fichas. Así, las fichas que tienen 1 punto deben ir juntas, pero acomodarlas requiere dos movimientos cuando menos, que no son suficientes para arreglar toda la cadena. Entonces se necesitan cuando menos tres movimientos para arreglar la cadena de fichas.

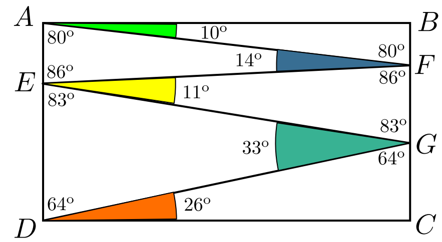
Es posible arreglar la secuencia intercambiando primero la ficha que tiene 4 y 2 puntos con la ficha que tiene 6 y 1, después la ficha que tiene 3 y 1 puntos con la que tiene 6 y 1 y, finalmente invirtiendo la ficha que tiene 3 y 1 puntos.

En el dibujo se muestra cómo quedan las fichas después de estos movimientos.



8. **(c)** Llamemos s la cantidad de intentos que hizo Lupita cuando su promedio era 3.8. Tenemos que $\frac{3.8s+3.99}{s+1} = 3.81$, de donde $s = 18$. Llamemos d a la distancia que debe alcanzar en su siguiente salto, tenemos que $\frac{3.81 \cdot 19+d}{20} = 3.82$, de donde $d = 4.01$.

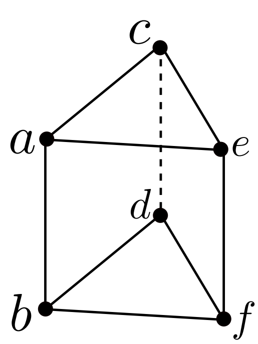
9. **(a)** Como el ángulo DAB es recto, el ángulo EAF mide $90^{\text{o}} - 10^{\text{o}} = 80^{\text{o}}$. Fijándonos en el triángulo AFE, tenemos que el ángulo AEF mide $180^{\text{o}} - 14^{\text{o}} - 80^{\text{o}} = 86^{\text{o}}$. Como el ángulo ADC es recto, el ángulo EDG mide $90^{\text{o}} - 26^{\text{o}} = 64^{\text{o}}$. Ahora, en el triángulo EGD tenemos que el ángulo DEG mide $180^{\text{o}} - 33^{\text{o}} - 64^{\text{o}} = 83^{\text{o}}$. Luego, el ángulo FEG mide $180^{\text{o}} - 86^{\text{o}} - 83^{\text{o}} = 11^{\text{o}}$.

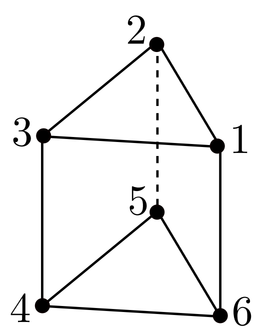


10. **(d)** Como ningún número primo termina en 4, uno de los números de la lista debe ser de dos cifras y empezar con 4, es decir, debe ser 41 o 43. Si 43 está en la lista, con los números restantes no hay posibilidad de escribir ningún número primo que contenga al 1 porque 21 y 51 no son primos, y 31 repetiría el 3 con 43. Así, 41 debe estar en la lista, y ésta se puede completar, por ejemplo, con 2, 3 y 5.

11. **(b)** Sea d la distancia entre el primero y el segundo punto. Dado un punto x que no es ninguno de los dos primeros, la distancia del primer punto a x es más larga por d que la distancia del segundo punto a x. Así, si restamos la suma de todas las distancias desde el primer punto a la suma de las distancias desde el segundo punto obtendremos $9d$. Luego, $d = \frac{2018-2000}{9} = 2$.

12. **(a)** Supongamos que un reordenamiento de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 que funciona está dado por a, b, c, d, e, f como se muestra en la figura de la izquierda abajo (sabemos que $d = 5$). Entonces $a+b+c+d = c+d+e+f$, de donde $a+b = e+f$. De la misma manera tenemos que este valor también coincide con $c+d$. Pero $a+b+c+d+e+f = 1+2+3+4+5+6 = 21$, así que $a+b = c+d = e+f = 7$, y de aquí que $c = 2$. Un acomodo que funciona aparece en la figura de la derecha.





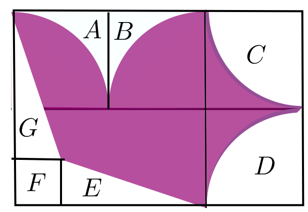
13. **(e)** Juntos gastaron $15\,\% + 100\,\% + 160\,\% = 275\,\%$ de lo que gastó Joaquín. Así, Joaquín gastó $\frac{5{,}500 \times 100}{275} = 2,000$. Como Armando gastó el $60\,\%$ más, gastó \$3,200.

14. **(b)** Observemos primero que LMN también es un triángulo equilátero, pues sus lados son perpendiculares a los de ABC. Llamemos d a la longitud de LB. Como el ángulo LBM es de 60^o, el triángulo LBM es la mitad de un triángulo equilátero, de donde obtenemos que $MB = 2d$. Usando Pitágoras, tenemos que LM mide $\sqrt{3}d$. Tenemos entonces que cada lado del triángulo equilátero mayor mide $3d$, mientras que cada lado del triángulo equilátero menor mide $\sqrt{3}d$. Así, la razón de sus lados es $\sqrt{3}$, por lo que la razon de sus áreas es $(\sqrt{3})^2$, y de aquí que el área del triángulo sombreado es 12.

15. **(e)** Digamos que la longitud original es L, y entonces, la segunda longitud es $.4L$. La longitud que Ramiro desea conseguir es $\frac{.4+1}{2}L = .7L$, así que el factor que estamos buscando es $\frac{.7}{.4} = 1.75$.

16. **(d)** Tere recorrió $6 \times 50 = 300\,\text{m}$. Miguel recorrió el triple, o sea, $900\,\text{m}$. Como Miguel dio cinco vueltas a la alberca, recorrió 10 veces la suma del largo y el ancho de la alberca. Así, el ancho de la alberca es $\frac{900}{10} - 50 = 40\,\text{m}$.

17. **(a)** En la figura, las regiones A y C tienen juntas la misma área que 4 cuadritos. Lo mismo pasa con las regiones B y D. Las regiones G y E, juntas, tienen la misma área que 3 cuadritos. Así, el área que no está sombreada es igual al área de $4+4+3+1 = 12$ cuadritos. Luego, el área sombreada debe ser igual al área de $24 - 12 = 12$ cuadritos. Así, el rectángulo tiene el doble de área que la región sombreada, es decir, 384 cm^2.

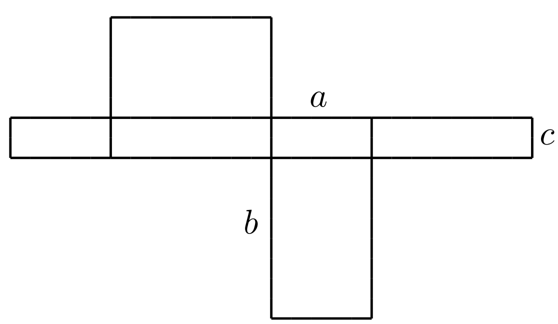


18. **(e)** Llamemos a al número a la derecha del 10. Es fácil ver que el número a la derecha de a debe ser $a - 10$. Completemos así el primer renglón del tablero. De esto se deduce que $a = 7$. La figura completa se muestra a la derecha.

10	a	$a-10$	-10	$-a$	$10-a$
	X				

10	7	-3	-10	-7	3
3					10
-7					7
-10					-3
-3	7	10	3	-7	-10

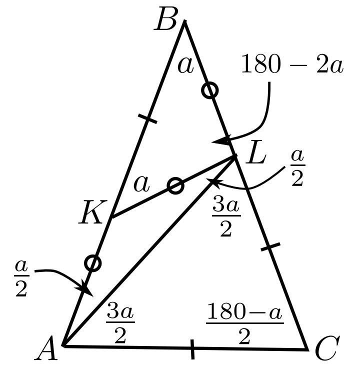
19. **(c)** Llamemos a, b y c a las dimensiones de la caja, según se muestra en el dibujo. Tenemos que $2a + 2b = 26$, así que $a + b = 13$. Tenemos también que $10 + 7 = (b + c) + (c + a) = 13 + 2c$, de donde $c = 2$. Luego, $b = 10 - 2 = 8$, $a = 7 - 2 = 5$ y el volumen de la caja es $8 \times 5 \times 2 = 80$ cm^3.



20. **(d)** *Primera forma.* Cada persona hace 75 llaveros en 9 horas, de manera que cada hora hace $\frac{75}{9}$ llaveros. Entonces 6 personas logran $\frac{6\times 75}{9} = 50$ llaveros por hora. Para producir 300 llaveros necesitan trabajar 6 horas.

Segunda forma. El número de personas se incrementó en 50 %, de manera que el número de horas debe reducirse de manera que al aumentar 50 % sea 9, así que es el resultado es 6 horas pues $\frac{9}{1.5} = 6$.

21. **(c)** Llamemos a a la medida del ángulo ABC. Como $BL = LK$ tenemos que BKL mide a, BLK mide $180 - 2a$ y LKA mide $180^{\text{o}} - a$. Tracemos el segmento LA. Como la suma de los ángulos del triángulo AKL es 180^{o}, el ángulo KAL mide $\frac{a}{2}$, al igual que el ángulo KLA (pues $KL = KA$).



Restando a 180^{o} las medidas de los ángulos BLK y KLA, se obtiene que ALC mide $\frac{3a}{2}$. Como $AB = BC$, tenemos que $LC = BK = AC$ y, por tanto, el ángulo LAC mide también $\frac{3a}{2}$. Como la suma de los ángulos del triángulo LAC es 180^{o}, el ángulo LCA mide $180 - 3a$.

Finalmente, dado que $a + (\frac{a}{2} + \frac{3a}{2}) + 180 - 3a = 180^{\text{o}}$, obtenemos que $a = 36^{\text{o}}$.