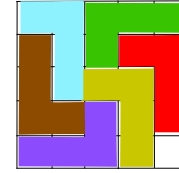


# Soluciones del Nivel I del Examen Eliminatorio Estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2016

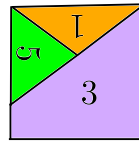
1. (b)

2. (d) El número de cuadritos en un tablero de  $5 \times 5$  es 25. Como la pieza tiene 4 cuadritos y  $4 \times 7 = 28$ , no es posible poner 7. Se muestra una forma de poner 6 piezas a la derecha.



3. (b) Lo mejor es que no cambien las dos primeras cifras, así que necesitamos que las dos últimas cifras sumen 7.

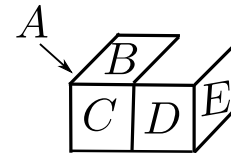
4. (a) Encajan como se muestra.



5. (c) Como  $201 - 102 = 99$ , el nuevo resultado es 99 menos.

6. (b) La suma menor se obtiene de manera que los números tengan menos cifras. como son 10 cifras, lo mejor es partirlas en 3, 3 y 4. Además, el que tiene 4 cifras debe empezar con la cifra más pequeña. En este caso, lo partimos en 258, 1953 y 764.

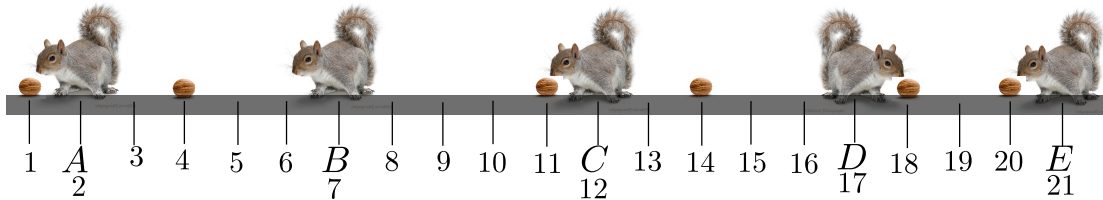
7. (b) La doblamos parcialmente como se muestra, observando que  $A$  queda abajo de  $B$  y al lado de  $C$ . Al seguir doblando con  $C$  al frente,  $D$  queda al lado de  $C$  y  $E$  queda atrás. Al voltear la caja se tiene que  $B$  queda abajo.



8. (c) Hay un total de 10 turnos de trabajo. Entre María y Cristina trabajan 7 turnos, así que Natalia trabaja los otros 3.

9. (e) Como  $12 + 5 = 17$  y la suma total es 32, nos faltan 15. A 5 le faltan 7 para 12 y entonces sobran 8 para repartir entre las dos, de manera que atrás de 5 hay  $7 + 4 = 11$  y atrás de 12 hay 4.

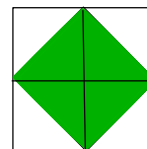
10. (c) Numeremos las posiciones como se indica en la figura. En el paso 1 las ardillas  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$  se encuentran en las posiciones 1, 6, 11, 18 y 20, respectivamente, y todas, salvo  $B$  ya tienen una nuez. Quedan nueces en las posiciones 4 y 14. La ardilla  $C$  está a distancia 3 de su segunda nuez y  $B$  llega antes que  $A$  a la nuez que está en la posición 4.



11. (d) Cada cubito pertenece a tres caras. Las caras que se ven nos muestran 6 lados negros y 14 blancos. Para que haya múltiplos de 3 tanto negros como blancos deberíamos poner 0 negros y 4 blancos, o 3 negros y 1 blanco. Sólo aparece la opción de 4 blancos. Para formar el cubo, podemos

pensar que la cara que aparece a la izquierda es la que queda al frente y las otras 4 quedan alrededor de ésta; la cara blanca queda por detrás.

12. **(e)** Partamos el cuadrado como se muestra en la figura. El cuadrado grande queda partido en 8 triángulos iguales, de los cuales la mitad forman el cuadrado pequeño.



13. **(d)** Para que justo en dos vueltas las marcas coincidan, se debe tener que la primera vez que la marca de la moneda  $B$  vuelve a tocar la moneda  $A$  es cuando ha recorrido  $\frac{2}{3}$  de la orilla de  $A$ . Entonces, el perímetro de  $B$  es  $\frac{2}{3}$  del perímetro de  $A$ , esto es  $\frac{2}{3}18 = 12$ .

14. **(c)** Como la suma de los números del 1 al 9 es 45, la suma en cada renglón y columna debe ser 15. Entonces 1 debe estar con 5 y 9, o con 6 y 8. En la figura se muestra cómo acomodar si 9 está junto a 1 (en renglón o en columna). A la derecha se ve cómo es imposible que 5 esté junto a 1 en el renglón (en la columna sería lo mismo), pues entonces a la derecha de 2 debería ir 3, y esto es imposible. También es imposible que 8 esté junto al 1 pues entonces a la derecha de 2 debería ir 6 que ya se usó.

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 9 | 5 |
| 6 | 2 | 7 |
| 8 | 4 | 3 |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 6 | 8 |
| 9 | 2 | 4 |
| 5 | 7 | 3 |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 9 |
|   | 2 |   |
|   |   | 3 |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 8 | 6 |
|   | 2 |   |
|   |   | 3 |

15. **(a)** Como Pablo tiene 3 años más que sus hermanos, si restamos 3 a la suma, obtenemos un número múltiplo de 4. El único número que cumple la condición es 27. Las edades de los triates son de 8 años y la Pablo es de 11.

16. **(d)** Para saber cuántos árboles tienen 6 peras y 3 manzanas, debemos ver cuántas veces debemos restar 3 a 25 hasta obtener un múltiplo de 4:

$$\begin{aligned}
 25 - 1 \cdot 3 &= 22 \\
 25 - 2 \cdot 3 &= 19 \\
 25 - 3 \cdot 3 &= 16 \\
 25 - 4 \cdot 3 &= 13 \\
 25 - 5 \cdot 3 &= 10 \\
 25 - 6 \cdot 3 &= 7 \\
 25 - 7 \cdot 3 &= 4 \\
 25 - 8 \cdot 3 &= 1
 \end{aligned}$$

Tenemos dos casos: El primer caso es que haya 3 árboles con 6 peras (y 3 manzanas), y 4 árboles con 8 peras (y 4 manzanas). En este caso hay  $3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 = 50$ . El segundo caso es sean 7 árboles con 6 peras (y 3 manzanas), y un árbol con 8 peras (y 4 manzanas). En este caso hay  $7 \cdot 6 + 1 \cdot 8 = 50$ .

17. **(e)** Los lugares de traslape son cada 3, así que van alternando blanco y negro. La estrella aparece cada 5 veces (en las casillas con número múltiplo de 5), pero sólo aparece en lugar de

traslape cada 15 veces (pues los traslapes son en las casillas que tienen los números que dejan residuo 2 al dividirlos entre 3). Entonces la estrella aparece en lugar de traslape negro cada 30 veces. Como la primera vez fue en la casilla con número 5, la siguiente será en casilla con número 35.

18. **(c)** Observemos que  $12 = 2^2 \cdot 3$ ,  $18 = 2 \cdot 3^2$ ,  $36 = 2^2 \cdot 3^2$ ,  $72 = 2^3 \cdot 3^2$  y  $108 = 2^2 \cdot 3^3$ . Hay que hacer 60 operaciones y 60 es un número par. Como se empieza con 12 y la suma de los exponentes de 12 es impar, al final el número que quede también debe cumplir con que la suma de sus exponentes sea impar. De las opciones, el único número que no cumple esto es 36.

19. **(a)** Como le dura 12 días para 4 gatos, para 2 gatos le duraría 24 días. Entonces para 6 gatos le dura 8 días.

20. **(a)** Primero observemos que al partir un rectángulo en 4 partes usando líneas que pasen por su centro y que sean paralelas a los lados, obtenemos 4 longitudes iguales en las 4 esquinas. En cada uno de los rectángulos pequeños, uno de esos cuartos es igual a lo que no se considera en el grande. Entonces el perímetro buscado es  $30 + \frac{20}{2} = 40$ .

21. **(b)** Podemos pensar que cada mesa de las dobles tiene 3 sillas. Si se tuvieran 6 sillas más, las mesas de 4 estarían completas y sobrarían 10 sillas para cada una de las de 3 sillas. Supongamos entonces que quitamos 1 silla de cada una de las que tienen 4 sillas; deben sobrar las mismas 10 y esto nos dice que hay 10 mesas.

## Soluciones del Nivel II del Examen Eliminatorio Estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2016

1. (c) Observemos primero que el lado  $AB$  mide el doble del  $AD$ , así que el área del rectángulo es 200. Por otro lado, recortando y reacomodando las regiones sombreadas es fácil ver que forman un cuadrado de la mitad del área del rectángulo  $ABCD$ .

2. (d) La única manera de obtener un resultado impar es sumando un par y un impar negativo. Por lo anterior, el mayor impar que se puede obtener es  $5 = 6 - 1$ , así que 7 no se puede conseguir. Los demás números se obtienen como sigue:  $3 = 6 - 3$ ,  $4 = 2 + 2$ ,  $5 = 6 - 1$  y  $8 = 4 + 4$ .

3. (c) Los dos ángulos marcados son suplementarios de los dos ángulos agudos del triángulo rectángulo. Como la suma de los dos ángulos agudos del triángulo rectángulo es  $90^\circ$ , la suma de los ángulos marcados es  $180^\circ + 180^\circ - 90^\circ = 270^\circ$ .

4. (b) Llamemos  $M$  a la edad de Miguel,  $T$  a la edad de Tere e  $I$  a la edad de Inés. Tenemos que  $(M + T) + (M + I) = 5 + 6 = 11$ . Luego,  $2M = 11 - (T + I) = 11 - 7 = 4$ , de donde  $M = 2$ . Así,  $T = 5 - 2 = 3$  e  $I = 6 - 2 = 4$ .

5. (a) Como los trozos que obtuvo tienen la misma longitud, del pedazo más largo Adriana cortó el doble de trozos que del pedazo más pequeño. Por lo anterior, la cantidad de trozos debe ser un múltiplo de 3, así que no es posible conseguir 8 pedazos. Como  $9 = 6 + 3$ ,  $12 = 8 + 4$ ,  $21 = 14 + 7$  y  $27 = 18 + 9$ , las demás cantidades de pedazos son posibles.

6. (e) De las siguientes parejas, a lo más uno de los números puede haber quedado escrito:  $\{1, 9\}$ ,  $\{2, 8\}$ ,  $\{3, 7\}$  y  $\{4, 6\}$ . Como quedaron 6 números en el pizarrón, forzosamente debió quedar escrito el 5.

7. (c) Las rutas posibles son:

$$\begin{aligned} D - A - B - C - D - B, & \quad D - A - B - D - C - B, \\ D - B - A - D - C - B, & \quad D - B - C - D - A - B, \\ D - C - B - A - D - B, & \quad D - C - B - D - A - B. \end{aligned}$$

8. (e) Llamemos  $a$  a la longitud del lado mayor de cada rectángulo y  $b$  a la longitud del lado menor. Así,  $2(a + b) = 16$ . Siguiendo el contorno del cuadrado notamos que su perímetro es  $a + b + a + b + a + b + a + b = 4(a + b) = 32$ .

9. (d) Una sola ficha roja debe ser el 10% del total de fichas sobre la mesa, así es que debe haber 10 fichas en total. De esas 10 fichas, 9 son azules.

10. (e) Llamemos  $a$  a la longitud del lado menor del trapecio. La longitud de lado mayor del rectángulo en donde se encierra la tira de papel doblada es 27 cm. Esta longitud se obtiene de sumar 5 veces el ancho de la banda (que es 3 cm) más 4 veces  $a$ , de donde  $a = \frac{27 - 5 \cdot 3}{4} = 3$ . Además, los pedazos triangulares que quedan encimados son triángulos rectángulos isósceles de lado 3 y así la longitud de la tira es  $19 \cdot 3$ .

11. (a) La primera vez que Arín alcanza un múltiplo de 5 es cuando da 4 saltos, pero la distancia que alcanza es  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ , que es menor que  $4 \times 5 = 20$ . La segunda vez que Arín alcanza

un múltiplo de 5 es cuando da 5 saltos, pero la distancia que alcanza es 15, que es menor que  $5 \times 5 = 25$ . La tercera vez que Arín alcanza un múltiplo de 5 es cuando da 9 saltos y la distancia que alcanza es 45, que es igual a  $9 \times 5$ .

12. **(b)** Llamemos  $m$  a la cantidad de niñas y  $h$  a la cantidad de niños, Tenemos que  $m + h = 20$  y que  $\frac{1}{2}m = \frac{1}{3}h$ , así que  $\frac{1}{2}m = \frac{1}{3}(20 - m)$  y entonces  $3m = 40 - 2m$  y  $m = 8$ .

13. **(c)** Cada lado del cuadrado mide 6. Podemos dividir la región sombreada en 4 triángulos cuyas bases son, respectivamente,  $a, b, c$  y  $d$ , y cuyas alturas son todas iguales a 6. Así, tenemos que  $\frac{6 \times a}{2} + \frac{6 \times b}{2} + \frac{6 \times c}{2} + \frac{6 \times d}{2} = 27$ , de donde  $a + b + c + d = 9$ .

14. **(d)** Si Marisol cree que son las 12:00, es porque su reloj marca las 12:05 (dado que cree que está adelantado 5 minutos). Como el reloj de Marisol en realidad está atrasado 10 minutos, entonces la hora real es las 12:15. Dado que el reloj de Mónica está adelantado 5 minutos, marca las 12:20. Pero Mónica cree que su reloj está atrasado 10 minutos, por lo que cree que son las 12:30.

15. **(a)** Digamos que la canasta de Caperucita tiene inicialmente  $p$  panecillos y que a cada tía le da  $a$  de ellos. Al entrar a casa de la primera tía, el lobo ya se comió la mitad de los panecillos, por lo que la canasta tiene  $\frac{p}{2}$  panecillos. Al salir de esta casa, a la canasta le quedan  $\frac{p}{2} - a$  panecillos. Al entrar a la casa de la segunda tía, la canasta tiene  $\frac{p}{4} - \frac{a}{2}$  panecillos y al salir de ésta le quedan  $\frac{p}{4} - \frac{3a}{2}$ . Finalmente al entrar a la casa de la última tía, la canasta tiene  $\frac{p}{8} - \frac{3a}{4}$  panecillos y al salir de esta le quedan  $\frac{p}{8} - \frac{7a}{4}$  panecillos. Pero sabemos que al salir de casa de la tercera tía, la canasta ya no tiene panecillos. Por lo tanto  $\frac{p}{8} - \frac{7a}{4} = 0$ , de donde obtenemos que  $p = 14a$ . Es decir, el número de panecillos que tiene originalmente la canasta es un múltiplo de 14.

16. **(a)** Como todos los números escritos en el pizarrón son diferentes, los más pequeños pueden ser 1 y 16 o 2 y 8 (para que su producto de 16). Observamos que  $225 = 3^2 \times 5^2 = 15^2$ . Esto quiere decir que si el producto de dos números diferentes es 225, entonces uno de ellos tiene que ser mayor que 15 y el otro menor que 15. Por lo tanto, los dos números más pequeños deben ser 2 y 8. Esto implica que los dos números más grandes tienen que ser ambos mayores a 8. Para que su producto sea 225 la única opción es que los dos números más grandes sean 9 y 25. Como entre 8 y 9 no hay ningún número entero, entonces hay exactamente cuatro números escritos en el pizarrón: 2, 8, 9 y 25.

17. **(d)** Para calcular la suma del número que se escribe hasta arriba, los 4 de las esquinas de la base se suman una vez, el del centro de la base se se suma 4 veces y los 4 restantes de la base 2 veces. Claramente, conviene escribir en todos los de la base (menos en el del centro) un 1 y escribir un 42 en el del centro. Así, el número que se escribirá en la punta de la pirámide es  $45 \times 4$ .

18. **(a)** Denotemos por  $a, b, c, d$  y  $e$  los radios de los círculos con centros en  $A, B, C, D$  y  $E$ ,

respectivamente. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}(1) \quad a + b &= 16, \\(2) \quad b + c &= 14, \\(3) \quad c + d &= 17, \\(4) \quad d + e &= 13, \\(5) \quad e + a &= 14.\end{aligned}$$

De (1) y (2) se tiene que  $c < a$ , de (2) y (3),  $b < d$ , de (3) y (4)  $e < c$ , de (4) y (5),  $d < a$  y, finalmente, de (1) y (5),  $e < b$ . Combinando logramos:

$$e < c < a \quad \text{y} \quad b < d < a,$$

así que  $a$  es el mayor.

19. **(b)** Como cada renglón tiene el mismo producto, éste debe ser igual a la raíz cúbica del producto de todos los números, es decir, 1000. De esta forma, arriba del signo de interrogación debe ser 50. En la columna del 1 también el producto debe ser 1000, y la única forma de conseguirlo es escribiendo los números 10 y 100. Para que el producto de la diagonal donde está escrito 20 sea igual a 1000 la única posibilidad es que se escriba 10 en el centro y entonces 5 va en la esquina y 4 va arriba de 5, en el lugar de la interrogación. La figura completa queda como se muestra a la derecha.

|    |     |    |
|----|-----|----|
| 20 | 1   | 50 |
| 25 | 10  | 4  |
| 2  | 100 | 5  |

20. **(c)** Llamemos  $A, B, C, D$  y  $E$  a los vagones, suponiendo que están en ese orden y usemos las mismas letras para representar el número de pasajeros en cada vagón. Un pasajero que está en el primer vagón tiene  $(A - 1) + B$  vecinos; un pasajero que está en el segundo vagón tiene  $A + (B - 1) + C$  vecinos. Como todos los vagones tienen al menos un pasajero, entonces  $C \neq 0$ , de donde tenemos que  $A + B - 1 = 5$ ,  $A + B + C - 1 = 10$  y por lo tanto  $C = 5$ . Siguiendo un análisis similar obtenemos que  $B + C + D - 1 = 10 = C + D + E - 1$ . Esto nos dice que  $A = D$  y  $B = E$ . Entonces  $A + B + C + D + E = 2 \times (A + B) + C = 2 \times 6 + 5$ .

21. **(b)** El lado del cuadrado mide 3. Sea  $O$  el centro del círculo y sea  $P$  el punto de tangencia de  $ST$  con el círculo. Dividamos el cuadrado en 9 partes iguales, como se muestra. Entonces  $OB$  es la diagonal de un cuadrado de lado 2, así que, por el teorema de Pitágoras,  $OB = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$  y  $PB = \sqrt{8} - 1$ . Por simetría, el triángulo  $SBT$  es isósceles, así que sus ángulos en  $S$  y  $T$  son de  $45^\circ$ . Como  $PB$  es perpendicular a  $ST$ , tenemos que  $\angle PBT = 45^\circ$ , de donde  $PT = PB$  y así  $ST = 2(\sqrt{8} - 1) = 4\sqrt{2} - 2$ .

