Soluciones del Examen Eliminatorio Estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2015

1. **(d)** Haciendo las divisiones correspondientes es fácil darse cuenta de que el único que no es entero es $\frac{2014}{4}$.

2. **(b)** En la figura puede verse que la longitud de uno de los lados menores del rectángulo pequeño es la mitad que la longitud del lado mayor, es decir, mide 5 cm. Luego, la longitud del lado mayor del rectángulo mayor es $5 + 10 + 5 = 20$.

3. **(d)** El perímetro del triángulo de Jimena es $6 + 10 + 11 = 27$, así que cada uno de los lados del triángulo equilátero mide $\frac{27}{3} = 9$.

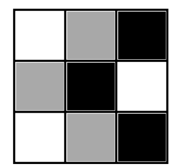
4. **(a)** Al armar el cubo las parejas de lados opuestos son $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$ y $\{5, 6\}$, así que las sumas que obtiene Hansel son 4, 6 y 11.

5. **(e)** Cada semana completa leerá 25 páginas. Entonces, en 9 semanas completas habrá leído 225 páginas. Esto ocurrirá un sábado. Como $239-225 = 14$, el domingo leerá 5 páginas y $14-5 = 9$, terminará un miércoles.

6. **(a)** Dorita se mueve dentro de un círculo con centro en el árbol y fuera de un círculo con centro en la casa del perro, ambos con radio de 5 m.

7. **(e)** En total pagaron 15 pesos, así que cada galleta costó 50 centavos. A Fernanda deberían haberle tocado 16 galletas.

8. **(b)** Como hay grises juntos y también negros, al menos deben pintarse 2. Con 2 basta repintando como se muestra:



9. **(d)** En 5 segundos recorre $500 \times 5 = 2500$ cm, así que la rueda da $\frac{2500}{125} = 20$ vueltas.

10. **(b)** Como todos los amigos de Max dicen una cantidad diferente, a lo más uno de ellos puede estar diciendo la verdad; por tanto, a lo más uno de sus amigos estudió. Tenemos dos posibilidades:

$*$ Si ninguno de sus amigos estudió, entonces Octavio dice la verdad, pero entonces tendríamos que Octavio estudió y, en consecuencia, sería falso que ninguno de sus amigos estudió. Luego, tenemos que esta opción no puede suceder.

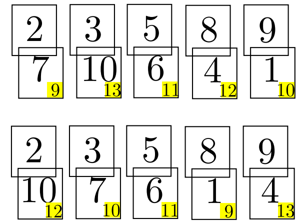
$*$ Si exactamente uno de sus amigos estudió, entonces Gabriela dice la verdad (y es la única que estudió).

11. **(e)** El área del semicírculo es de $\frac{\pi}{2}$. La parte sombreada de abajo es la mitad de la diferencia entre el área del cuadrado y la de dos semicírculos, o sea, $\frac{4-\pi}{2}$. En total el área sombreada es de $\frac{\pi}{2} + \frac{4-\pi}{2} = 2$.

12. **(b)** Si la persona adicional fuera mujer se repetiría el mes de nacimiento, así que ya hay 12 mujeres en la fiesta (una de cada mes). Si la persona adicional fuera hombre se repetiría el día de la semana en que nació, así que ya hay 7 hombres en la fiesta (uno que nació cada día de la semana). En total, hay 19 personas.

13. **(c)** Prolonguemos la horizontal superior y la vertical derecha hasta que se corten. Se formaría, junto con las partes sombreadas, un triángulo rectángulo con área $\frac{1.5 \times 2}{2} = 1.5$ y el pedazo agregado tiene área .5 así que el área sombreada es 1.

14. **(c)** Como las tarjetas 2 y 9 ya están ocupadas, la suma que cada una forme con su pareja no puede ser 11; lo mismo ocurre con la 3 y la 8, por lo que concluimos que la tarjeta que se aparea con la 5 es la 6. Entonces la suma 9 sólo se puede lograr apareando 7 con 2 o 1 con 8. En el primer caso, 10 debe aparearse con 3, 4 con 8 y 1 con 9. En el segundo caso, 10 debe aparearse con 2, 7 con 3 y 4 con 9.

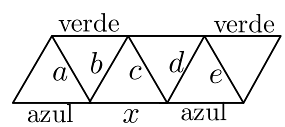


15. **(c)** Como el área del cuadrado y el pentágono son consecutivos, el área del triángulito que se forma al doblar la esquina es de 1 cm. Luego, como el cuadrado puede dividirse en 8 triángulos iguales a ese, su área es $8\,\text{cm}^2$.

16. **(d)** Llamemos a a la cantidad de ramas con 5 hojas, b a la cantidad de ramas con 2 hojas y h al número total de hojas. Tenemos que $5a+2b=h$. También sabemos que $a+b=9$. Multiplicando esta última ecuación por 5 y restándole la primera tenemos que $3b=45-h$; de aquí deducimos que h debe ser múltiplo de 3, de manera que la respuesta 32 no es posible. Las demás sí son posibles: $5(9)+2(0)=45$, $5(7)+2(2)=39$, $5(6)+2(3)=36$ y $5(2)+2(7)=24$.

17. **(c)** Llamemos p al promedio de los alumnos que no aprobaron. Luego, tenemos que $.6(8)+.4(p)=6$, de donde $p=3$.

18. **(a)** Llamemos a, b, c, d y e a los segmentos marcados en la figura. Al analizar los colores de los dos dos triángulos que contienen al segmento a, notamos que a no puede ser verde ni azul, así que debe ser rojo. Luego, el segmento marcado con b debe ser azul. El segmento e de la figura está en una situación similar a la que tenía originalmente el segmento a, así que debe ser rojo. Luego, el segmento marcado con d debe ser verde. Ahora el segmento c está en una situación similar a la que tenía originalmente el segmento a, así que debe ser rojo. Finalmente tenemos que el segmento marcado con x debe ser verde.

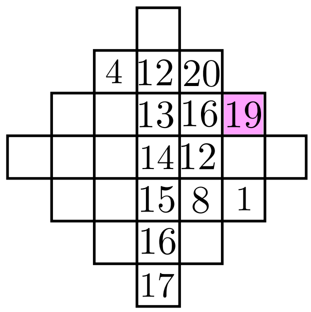


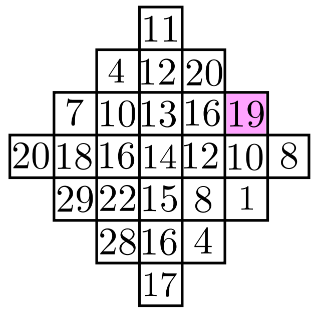
19. **(b)** Llamemos L a la longitud del lado mayor del rectángulo y l a la longitud del lado menor. De acuerdo a las cantidades que obtuvieron, tenemos que Monserrat sumó tres lados sin incluir uno de los menores (de donde obtenemos $2L+l=44$) e Isabela sumó tres lados sin incluir uno de los mayores (de donde obtenemos $L+2l=40$). Sumando ambas ecuaciones obtenemos $3L+3l=84$, de donde $L+l=28$. Luego, el perímetro del rectángulo mide 56 cm.

20. **(c)** Es claro que hay que cambiar al menos un asterisco por un +. Cambiando solamente uno, el valor máximo que podríamos conseguir es $2-1+5-2-1-5-2-1-5=-15$, así que un cambio no es suficiente. Es posible conseguir que la ecuación se cumpla con dos cambios, por ejemplo: $2-0-1+5-2-0-1+5-2-0-1-5=0$.

21. **(a)** Coloreemos de amarillo todas las regiones vacías, con excepción de la central. Observemos que todas las regiones amarillas son vecinas de la que tiene escrito -4, así que su suma es -4. Ahora, 2 debe ser el resultado de sumar la central con todas las regiones amarillas (cuya suma es -4), así que en el centro debe estar escrito 6. Por la simetría del círculo con respecto al centro podemos ver que sí es posible la solución poniendo -4 en todas las casillas de afuera y 2 en todas las de adentro.

22. **(d)** Observemos primero que para conocer todos los renglones de cualquier línea, basta conocer dos de los números de la línea, pues en cada línea los números consecutivos se obtienen sumando o restando la misma cantidad. Como hay dos números en la columna central, es fácil completar ésta. De ahí se puede pasar fácilmente a completar los renglones que tienen el 1 y el 4. Pero entonces ya se tendrán dos números en el renglón que contiene el cuadro sombreado. En la primera figura mostramos sólo las cuentas necesarias para obtener la respuesta. En la segunda mostramos la cuadrícula completa.





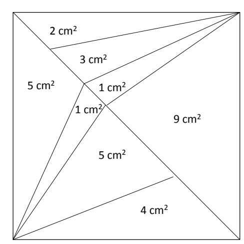
23. **(d)** Si el primero que tiene el mismo color que el 1 es el 2, entonces todos tienen ese color pues $3 = 2+1$, $4 = 3+1$ y $5 = 4+1$. Aquí contamos 2 posibilidades (de acuerdo al color que tenga el 1).

Si el primero que tiene el mismo color que el 1 es el 3, entonces, también el $4 = 1 + 3$ y el $5 = 1 + 4$ tienen ese color. Aquí contamos otras dos posibilidades.

No es posible que el primero igual al 1 sea el 4 porque $1 + 4 = 2 + 3$, ni tampoco que sea el 5 pues $2 + 3 = 5$.

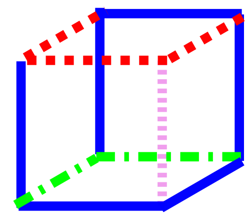
Tenemos otras 2 posibilidades cuando no hay ningún otro del mismo color que el 1.

24. **(d)** Haciendo los trazos que se muestran en la figura, por la simetría podemos calcular el área de cada uno de los triángulos marcados. Como todos tienen la misma altura, el área de los triángulos es proporcional a sus bases. Fijándonos en las áreas de los triángulos que tienen por bases a los segmentos a, b, c, d y e, podemos concluir que el segmento mayor es d.

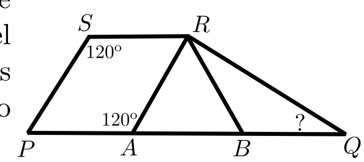


25. **(a)** Como $25 + 60 = 85$ deducimos que por lo menos hay un canguro más. Ordenemos los pesos y llamemos x al segundo más ligero y y al antepenúltimo más pesado. Sabemos que x aporta al menos el 12.5 % del peso total (es decir, la mitad de 25 %) y que y aporta a lo más el 20 % (la tercera parte de 60 %). Faltan 15 % que no pueden estar distribuidos entre dos canguros, así que sólo hay un canguro más.

26. **(d)** A cada vértice del cubo llegan 3 aristas, como no se traslapan los alambres, al menos en cada vértice debe haber el extremo de una de las piezas de alambre. De esta forma, debe haber al menos 8 extremos de alambre para formar el cubo, es decir, deben usarse al menos 4 pedazos. En la figura se muestra cómo los alambres que miden 1, 2, 3 y 6 cm de longitud pueden rodear al cubo.



27. **(d)** Sean A y B los puntos sobre PQ de manera que $PA = AB = BQ$. Tenemos entonces que $PARS$ es paralelogramo, de donde $\angle PAR = 120^o$. De aquí resulta que $\angle RAB = 60^o$ y entonces el triángulo RAB es equilátero. En consecuencia, el triángulo RBQ es isósceles, con $RB = BQ$ y el ángulo en B igual a 120^o. El ángulo buscado es $\frac{180^o - 120^o}{2} = 30^o$.



28. **(e)** Sean a, b, c y d las distancias ente puntos consecutivos. Los números 2, 5 y 6 no son suma de otros así que tres de los números a, b, c y d son 2, 5 y 6. Por otro lado, 22 es la distancia mayor así que debe ser la suma de a, b, c y d, y entonces las cuatro distancias entre puntos consecutivos son 2, 5, 6, 9. Ahora, 8 es una de las sumas, por lo que 2 y 6 están juntos, También 15 es una suma, y por lo tanto 6 y 9 están juntos. Como 7 no es ninguna suma, 2 y 5 no están juntos. El único acomodo posible es que las distancias estén en orden 2, 6, 9 y 5 (o a la inversa). El número faltante es $9 + 5 = 14$.

29. **(c)** Hay que intentar poner cada uno de los 10 dígitos en todas las posiciones marcadas con guiones en _1_4_2_7_0_9_. Eso nos daría un total de 70 posibilidades, pero al hacer esa lista, los números 1142709, 1442709, 1422709, 1427709, 1427009 y 1427099 aparecen dos veces. Luego, en total hay que intentar $70 - 6 = 64$ números.

30. **(a)** Basta que saque 1 del que dice "surtidos" y el sabor de ese dulce será la etiqueta de ese dispensador. La que dice el sabor del que sacó será la del otro y la que dice el otro sabor será la mixta. Por ejemplo, si saca un dulce de limón, no es posible que la que dice "dulces de limón" sea la surtida, puesto que entonces la de cereza tendría correcta su etiqueta.