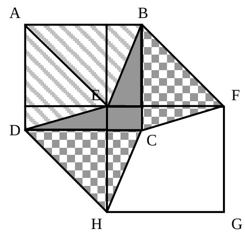
Examen Canguro Matemático 2007
Nivel Olímpico

Soluciones

1. **(d)** La suma de los perímetros de los rectángulos es igual al perímetro del cuadrado original más dos veces la longitud del corte que se hizo, es decir, 20 + 5 + 5 = 30 cm. El perímetro que buscamos es 30 – 16 = 14 cm.
2. **(a)** La única forma de completar la cuadrícula es la que se muestra:

1	3	2
2	1	3
3	2	1

3. **(c)** Natalia necesita 3 cubos en el primer nivel, 6 cubos en el segundo nivel y 8 cubos en el tercer nivel.
4. **(a)** El orden de la fila es Pedro, Jorge, Angélica, Ignacio y Mario.
5. **(c)** Si volvemos a armar el cubo, veremos que hay exactamente un cubo con dos caras azules en cada arista del cubo original.
6. **(d)** Sandra se quedó con $^2/_3$ - $^1/_4$ x $^2/_3$ = $^1/_2$ de pastel.
7. **(b)** La respuesta es clara viendo que $\frac{1234}{321} < 4$, $\sqrt[3]{100000} < \sqrt[3]{10^6} = 100$, $10^2 = 100$, $1 + 10 + 10^2 = 110$ y $\pi^5 > 3^5 = 243$.
8. **(e)** Al final del intercambio todos tenían 10 canicas, como Francisco se quedó con 3 canicas menos originalmente tenía 13.
9. **(c)** A cada lado de la pareja hay 11 – 4 = 7 asientos (sin contar los asientos de Arturo y Brenda). En total hay 2 x 7 + 2 = 14 asientos.
10. **(e)** Las letras se repiten cada 7; como al dividir 2007 entre 7 obtenemos de residuo 5 la letra será igual a la 5ª letra de la palabra CANGURO.
11. **(a)** El perímetro de la cruz es igual al perímetro de la hoja original: 2x(15+9)=48.
12. **(a)** Exceptuando la primera, que es positiva, el resto de las opciones son siempre menores o iguales a 0.
13. **(d)** En la figura, el área del triángulo AEB es igual al área de BCF; análogamente el área de AED es igual al área de DCH.



14. **(d)** Después del disparo quedan 42 pájaros en los árboles. Si llamamos ***x*** a la cantidad del primer árbol, tenemos que ***x + 2x + 4x = 42***, de donde ***x=6***.
15. **(c)** La suma de los perímetros de todos los cuadrados es igual a 4 veces la suma de todos los segmentos que están sobre ***AB***, es decir, 4 x 24 = 96.
16. **(c)** El resultado de Óscar debió ser 78 o 79, el resultado de Liz debió ser 74, 73 o 72; como el resultado de Jorge debe ser múltiplo de 5 o 6 la única posibilidad es 72; así, Jorge pensó en $^{72}/_6$=12.
17. **(b)** Tenemos que $8^8 = \left(2^3\right)^8 = 2^{24} = 4^{12} = \left(4^4\right)^3$.
18. **(b)** La pieza rectangular del cilindro tiene como base la circunferencia de cada una de las tapas, es decir, $2\pi(1) = 2\pi$. Para que el área pueda ser π, la altura del cilindro debe ser $\frac{1}{2}$.
19. **(e)** Si se usan ***n*** líneas verticales y ***m*** horizontales se obtienen ***(n-1)(m-1)*** celdas. Suponiendo que $n \geq m$ es fácil comprobar que la mayor cantidad de celdas se alcanza cuando ***n=8*** y ***m=7***.
20. **(d)** El perímetro del rectángulo pequeño es 60 cm y es igual a la suma de 12 radios, de donde tenemos que cada radio mide 5 cm. El perímetro del rectángulo grande es la suma de 20 radios.

21. **(e)** Las opciones son 112007, 121007, 120107, 120017, 120071, 211007, 210107, 210017, 210071, 201107, 201017, 201071, 200117, 200171 y 200711.
22. **(d)** Llamemos x al recorrido en terreno plano y y al recorrido en terreno inclinado. Sabemos que $2 = \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{y}{6} + \frac{x}{4} = \frac{3x + 4y + 2y + 3x}{12} = \frac{6x + 6y}{12} = \frac{x + y}{2}$, de donde se obtiene que la mitad del recorrido es $x + y = 4$.
23. **(b)** Es claro que el primer dígito debe ser menor o igual a 3 y mayor que 0. Si el primer dígito es 3 entonces el resto debe ser 0, pero esto no es posible porque la última cifra debe ser mayor que 1. Si el primer dígito es 2 entonces la tercera cifra debe ser mayor que 1 al mismo tiempo que las cifras restantes son 0, lo cual es posible solamente para 2020. Si la primera cifra es 1 entonces la segunda cifra es mayor a 1 y la única posibilidad es 1210.
24. **(d)** Llamemos g a la suma de los números que tachó Gaby y x al número que estamos buscando. Tenemos que $g + 3g + x = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, de donde $45-x$ debe ser un múltiplo de 4; así, las únicas opciones que tenemos para x son 9, 5 y 1. Intentando encontrar en cada caso los números que seleccionó Gaby, es fácil ver que la única opción posible es $x=5$.
25. El triángulo ***DCB*** es isósceles y el ángulo ***DCB*** mide ***80º + 60º = 140º***; como la suma de los ángulos internos de un triángulo es ***180º*** tenemos que el ángulo ***DBC*** debe medir ***20º***, de donde podemos obtener que el ángulo ***ABD = 60º - 20º = 40º.***
26. **(c)** No puede haber cuatro o cinco múltiplos de tres porque forzosamente quedarían dos consecutivas. Si hubiera tres múltiplos de tres, forzosamente dos de ellos quedarían en una tercia de consecutivos. Si hubiera un solo múltiplo de tres o no hubiera ninguno hay tres enteros consecutivos donde, o la suma de los tres es múltiplo de 3, o la suma de dos consecutivos es múltiplo de 3.
27. **(a)** Para cada letra hay dos posibilidades (borrarla o no borrarla), lo cual nos daría un total de 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 casos diferentes. Eliminando la opción de no borrar ninguna letra y las palabras que se pueden obtener de dos formas distintas (ANA, N y A) tenemos que el total de palabras es $2^6 - 4$.
28. **(b)** Como la suma de los dígitos de n es 23 y el número es menor que 1000 las cifras del número buscado deben ser 3 cifras; sabiendo que es par y que deja residuo 1 al dividirlo entre 5 podemos concluir que su última cifra es 6. De lo anterior se deduce que las otras dos cifras son 8 y 9; para que el número sea múltiplo de 7 la única posibilidad es 896.
29. **(d)** La altura de un triángulo equilátero de lado 1 es $\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}$. Si sumáramos las alturas de los triángulos ABF y DEC obtendríamos la suma de un lado del cuadrado y la longitud del segmento ED; es decir, $\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4}} = 1 + \boldsymbol{EF}$, de donde $\boldsymbol{EF} = \sqrt{3} - 1$.
30. Considerando que el número tiene tres dígitos, la suma de sus cifras debe ser 27 (pero 999 no cumple) o 18 para que al restar 9 el número siga siendo un múltiplo de 9. Examinando los diferentes casos obtenemos que las respuestas son: 486, 567, 648, 729 y 972.