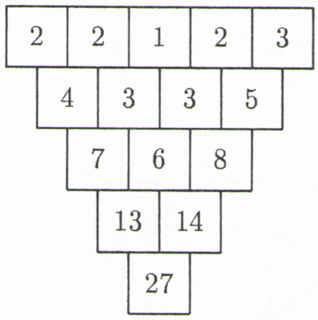
Soluciones del Examen Eliminatorio de la 16a Olimpiada Mexicana de Matemticas, 2002

Solución 1. El resultado no puede ser mayor a $1+2+3+4+5=15$. Excepto 17 todas las otras opciones son posibles: $1=+1+2-3-4+5$, $3=+1-2+3-4+5$, $7=-1+2-3+4+5$ y $13=-1+2+3+4+5$. La respuesta es (e).

Solución 2. Al escribir todos los números la pirámide queda como se muestra debajo. La respuesta es (c).



Solución 3. El lado TC mide $10-3=7$ cm. Como $AD=MT=BC=10$ cm, basta observar que la diferencia entre el perímetro de $MBTC$ y el de $AMTD$ es $2(MB-AM)=2\cdot 4=8$ cm. La respuesta es (b).

Solución 4. Mi canario se comió $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$ del total de alpiste, así que queda $\frac{1}{4}$ de la cantidad inicial. La respuesta es (b).

Solución 5. La primera ver quité 200 tarjetas, dejando 1802. La segunda vez eliminé 180 tarjetas y me quedaron 1622. La respuesta es (a).

Solución 6. Debe haber al menos 5 amigos con 16 años que tengan los ojos color café, pues $10+10-15=5$. La respuesta es (a).

Solución 7. Sea a la cantidad de niños que llegaron antes que Raúl. Tenemos que $2a+a+1=28$, de donde $a=9$. La respuesta es (e).

Solución 8. Cada lado del cuadrado I mide $\frac{16}{4}=4$ cm, y cada lado del cuadrado II mide $\frac{24}{4}=6$ cm. Así, cada lado del cuadrado III mide $4+6=10$ cm, y cada lado del cuadrado IV mide $10+6=16$ cm. El perímetro del cuadrado IV es $16\times 4=64$ cm. La respuesta es (c).

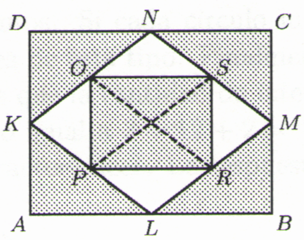
Solución 9. Flor y Cristina nacieron el mismo mes, así que nacieron en marzo. El número de día del cumpleaños de Cristina y Daniela es el mismo, por lo tanto cada una cumple en un día 20. Con esos datos podemos deducir que Cristina nació en marzo 20, Flor en marzo 1, Daniela en julio 20 y Blanca en mayo 17. La respuesta es (a).

Solución 10. Del 1 al 100 hay 33 múltiplos de 3 y 10 números que terminan en 3. Los números 3, 33, 63 y 93 están en ambas categorías, así que hay $33+10-4$ números. La respuesta es (d).

Solución 11. Como $\frac{17}{3} > 5$, Octavio tiene que haber comido 6 o más galletas. Si Octavio hubiera comido 6 galletas nada más, quedarían 11 galletas para los otros dos niños, y entonces alguno de ellos habría comido 6 galletas también. Por lo anterior, Octavio tuvo que comerse al menos 7 galletas. La respuesta es (c).

Solución 12. Cuando el número de dígitos es 6, la cantidad total de números telefónicos es $9 \cdot 10^5 = 900000 < 987654$. En cambio, cuando el número de dígitos es 7, hay 9000000 posibilidades para los números telefónicos, y este número sobrepasa 987654. La respuesta es (e).

Solución 13. El área del cuadrilátero $NKLM$ es $\frac{1}{2}$, así que la suma de las áreas de los 4 triángulos DNK, NCM, MBL y KLA es $\frac{1}{2}$. Dividiendo el cuadrilátero $NKLM$ en cuatro cuadriláteros iguales como se muestra en la figura, se observa que el área del rectángulo $OPRS$ es la mitad del área de $NKLM$, o sea $\frac{1}{4}$. De lo anterior tenemos que el área sombreada es $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. La respuesta es (d).



Solución 14. Observemos que siempre que se corta una pieza añadimos 2 piezas más a la cuenta. De esta manera, en el n−ésimo minuto el número de piezas será $1 + 2n$. Es suficiente entonces encontrar una n tal que $1 + 2n \geq 317$. La respuesta es (e).

Solución 15. La suma de los dígitos de cualquier número de 3 cifras es menor o igual a $9+9+9 = 27$. Sumando los dígitos de 19 obtenemos 10, que es la mayor suma posible entre 1 y 27. Es suficiente con encontrar un número de 3 dígitos que cumpla que la suma de sus dígitos sea 19, como 991. La respuesta es (b).

Solución 16. Sabemos que tres caras del cubo quedaron intactas. Juntas, las dos áreas sombreadas en la figura A tienen la misma área que otra cara del cubo. De la misma manera podemos agrupar y sumar las áreas restantes como se muestra en B y en C para obtener superficies iguales a las caras del cubo original. Tenemos entonces que la superficie de la pieza es igual a la del cubo. Si llamamos a a una arista del cubo, tenemos que $a^3 = 8 = 2^3$, así que $a = 2$ m y la superficie del cubo es $6 \times 2^2 = 24\text{m}^2$. La respuesta es (b).

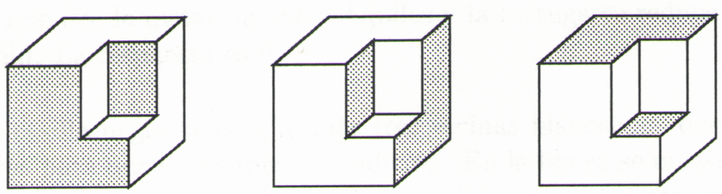


Fig. A Fig. B Fig. C

Solución 17. Sea n el número de ratones. Entonces tenemos

$$\left(\frac{25}{100} \cdot \frac{50}{100} + \frac{75}{100} \cdot \frac{20}{100}\right) n = 99,$$

o equivalentemente

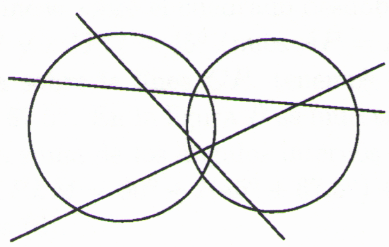
$$\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\right)n = 99.$$

Simplificando obtenemos $\frac{11}{40}n = 99$, y entonces $n = 360$. La respuesta es (a).

Solución 18. Como todos los cuadrados pesan igual, si quitamos un cuadrado de cada platillo no alteraremos el orden de los pesos. La posición de A y B nos indica que un triángulo pesa menos que un círculo, así que D pesa menos que B pero más que A. La respuesta es (a).

Solución 19. Sean r y R los radios de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$, respectivamente. Como el área del rectángulo es $(2R+2r)R = 15$, tenemos que el área de PQT es $\frac{(R+r)R}{2} = \frac{15}{4}$. La respuesta es (b).

Solución 20. Entre 3 rectas hay como máximo 3 puntos de intersección. Un círculo puede intersectar a una recta a lo más en 2 puntos. Si cada círculo intersecta a cada recta en 2 puntos, tenemos en total $2\cdot 6 = 12$ intersecciones de este tipo. Finalmente, dos círculos se intersectan a lo más en 2 puntos. De lo anterior tenemos que la cantidad de intersecciones que puede obtenerse con 2 círculos y tres líneas debe ser menor o igual a $3+12+2 = 17$. En la figura se muestra que es posible encontrar un dibujo con esas características. La respuesta es (d).

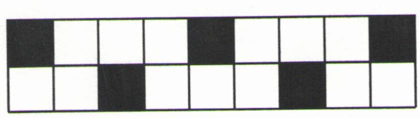


Solución 21. Como cada paquete se pesó con otros 3, al hacer la suma de todos los pesos $(5+6+8+9+11+12 = 51)$ sumamos tres veces el peso de cada paquete, así que el peso de los cuatro paquetes es $\frac{51}{3} = 17$. La respuesta es (b).

Solución 22. Entre dos domingos pares hay 14 días. Como entre el primer y el último domingo par hubo 28 días, el primer domingo debió ser un número par estrictamente menor a 4 (pues $28+4 = 32$), así que fue día 2. Tenemos entonces que el día $2+14 = 16$ fue domingo, así que el día 20 fue jueves. La respuesta es (d).

Solución 23. Cada minuto, la distancia entre Aquiles y la tortuga se reduce 99m. Por lo tanto se necesitan $\frac{990}{99} = 10$ min. La respuesta es (c).

Solución 24. Cada casilla negra tiene a lo más tres vecinas blancas así que se necesita pintar al menos 5 casillas negras para que se cumpla la condición. En la figura se muestra una coloración del tablero con 5 casillas negras que cumple la condición pedida. La respuesta es (a).



Solución 25. Si todos los partidos hubieran sido empates se habrían repartido 90 puntos entre los equipos. La diferencia $130 - 90 = 40$ corresponde a los partidos que no fueron empates. Por lo anterior, hubo 5 empates en el torneo. La respuesta es (e).

Solución 26. Si tuviéramos $a = 1$ y $b = 9$, entonces tendíamos que $c = 27$ y $\frac{b-a}{c-a} = \frac{9-1}{27-9} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$. De hecho $9a = b$ y que $3b = c$, de donde $b - a = 9a - a = 8a$ y $c - b = 3b - b = 2b$, de donde $\frac{b-a}{c-b} = \frac{8a}{2b} = 4 \cdot \frac{a}{b} = 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$. La respuesta es (d).

Solución 27. El múltiplo más pequeño de 21 y 9 es 63, que tiene 6 divisores (1, 3, 7, 9, 21 y 63) y cada uno de ellos divide a n. La respuesta es (d).

Solución 28. Si x es la cantidad de personas que iban en el barco originalmente, tenemos que $60x = (x + 30)50$, de donde $x = 150$. La respuesta es (e).

Solución 29. Primero observemos que 2002 tiene residuo 2 al dividirlo entre 4, así que el número que obtenemos después de 2002 pasos es el mismo que obtenemos después de 2 pasos. Por lo anterior, terminaremos en un cuadrado con un 1 o un 3. Otra manera de resolver el problema es notar que los cuadrados que están a distancia 2002 desde la esquina superior izquierda están en una diagonal a 45° que tiene solamente 1's y 3's. La respuesta es (b).

Solución 30. Trazando algunas líneas sobre el cuadrado desdoblado, como se muestra en la figura A, podemos ver que $\angle QAP = 90°$ y $\angle APQ = 45°$ (pues $AP = AQ$ ya que el doblez es simétrico). Como el triángulo PBC se dobla sobre la línea CP, tenemos que $\angle BPC = \angle CPO$, y entonces tenemos que $\angle BPC = \frac{180° - 45°}{2} = 67.5°$. En la figura B se muestra el pentágono una vez que se han hecho todos los dobleces. Como la suma de los ángulos internos de un pentágono es 540°, tenemos que $540° = \angle QAP + 2\angle APL + 2\angle PLM = 90° + 2(45° + 67.5°) + 2\angle PLM = 315° + 2\angle\alpha$, de donde $\angle\alpha = \frac{225}{2} = 112.5°$ La respuesta es (d).

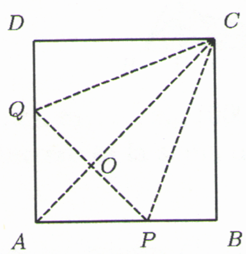


Fig. A

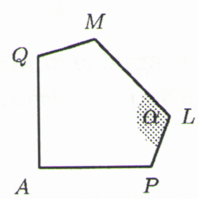


Fig. B