Soluciones del Examen Canguro Matemático Mexicano 2023

Nivel Estudiante

1. **(c)**. Con tres $6'$s tendría 18 puntos y, con otros dos dados ya superaría los 19 puntos. Con dos $6'$s tendría 12 puntos y podría haber tenido los 7 puntos restantes en los tres dados (con un 1, un 2 y un 4).

2. **(d)**. Puede pintar el lienzo del centro de cualquiera de los 4 colores. Luego, para cada uno de los otros dos lienzos puede escoger cualquiera de los otros 3 colores. El resultado es $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

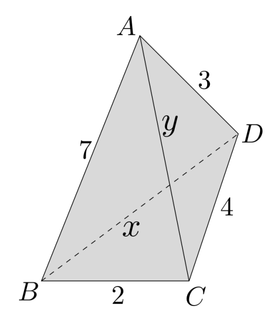
3. **(d)**. La ecuación dada es equivalente a la ecuación

$$a \cdot b = 5 \cdot 7.$$

Como $35 = 5 \cdot 7$, los posibles valores de (a, b) son: $(1, 35)$, $(35, 1)$, $(5, 7)$ y $(7, 5)$.

4. **(e)**. Al multiplicar 5 por sí mismo el dígito de las unidades siempre es 5, así que el dígito de las unidades de $5^n + 1$ es siempre 6. Al multiplicar un número terminado en 6 por otro terminado en 6 obtenemos un número que también termina en 6.

5. **(b)**. Llamemos A, B, C y D a los vértices de la pirámide, como se muestra en la figura y sean x la longitud de BD y y a la longitud de AC. Usamos la desigualdad del triángulo varias veces: Por el triángulo BCD tenemos que $x < 4 + 2 = 6$, pero por el triángulo ABD tenemos que $3 + x > 7$, es decir, $x > 4$; combinando las dos desigualdades obtenemos $x = 5$. Análogamente, por el triángulo ACD, vemos que $y < 3 + 4 = 7$, y por el triángulo ABC tenemos que $7 < y + 2$, o sea que $5 < y < 7$ que fuerza a y a ser 6.



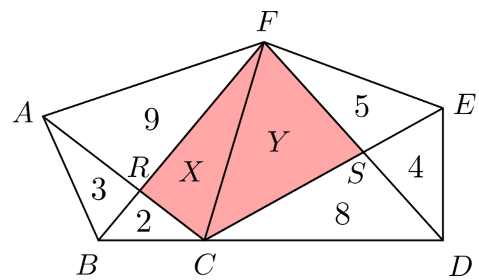
6. **(a)**. Veamos que $N = 10$:

$$7! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 7! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 10!.$$

7. **(e)**. Para $a = 0$ tenemos la ecuación $y = x^3 + 3x^2 + 4$, y para $a = 1$ tenemos la ecuación $y = x^3 + 3x^2 + x + 6$. Restando la primera ecuación de la segunda tenemos $0 = x + 6 - 4$, de donde $x = -2$. Al sustituir este valor en la primera ecuación, obtenemos $y = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 4 = 8$. (Nota: Podemos verificar que, en efecto, para toda a, $(-2, 8)$ es solución de la ecuacipon dada.)´

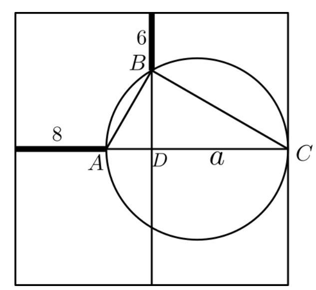
8. **(b)**. Al sumar las 5 relaciones dadas, tenemos que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 5S$, lo que equivale a $S = 15 + 5S$. Así, $S = -\dfrac{15}{4}$.

9. **(c)**. Tracemos la diagonal en la región sombreada, partiendo en regiones de área X y Y, y nombremos los vértices de la figura, como se muestra. Los triángulos ABR y ARF tienen la misam altura desde A y, como el área de ARF es el triple del área de ABR, tenemos que $FR = 3\,RB$ y entonces $X = 3 \times 2 = 6$. De la misma manera, en los triángulos DES y DSC tenemos que $CS = 2\,SE$, así que $Y = 2 \times 5 = 10$. El área sombreada es $6 + 10 = 16$.



10. **(c)**. Debemos tener que $a = 2^{10} - 2b = 2^9 - b$ sea un entero positivo, es decir, $b < 2^9$, así que b puede ser cualquier entero entre 1 y $2^9 - 1$.

11. **(a)**. Primera forma: Llamemos a a lo que mide cada lado de los cuadrados pequeños y sean AB, B, C y D los puntos de intersección del círculo con los lados de los cuadrados, como se muestra en la figura. Por el teorema de Pitágoras en los triángulos BAD y BCD tenemos las siguientes ecuaciones:



$$\begin{aligned} AB^2 &= (a-8)^2 + (a-6)^2 \\ BC^2 &= (a-6)^2 + a^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC nos dice que $AB^2 + BC^2 = (2a-8)^2$. Al comparar las ecuaciones tenemos

$$(a-8)^2 + (a-6)^2 + (a-6)^2 + a^2 = (2a-8)^2.$$

Desarrollamos:

$$a^2 - 16a + 64 + a^2 - 12a + 36 + a^2 - 12a + 36 + a = 4a^2 - 32a + 64,$$

de donde $8a = 72$, es decir, $a = 9$.

Segunda forma: Con la nomenclatura de la solución anterior, usando la *potencia del punto* D al círculo, tenemos que $a(a-8) = (a-6)^2$, de donde $a^2 - 8a = a^2 - 12a + 36$, así que $4a = 36$ y $a = 9$.

12. **(b)**. Tenemos que

$$2^{2ab+1} = \left(2^{ab}\right)^2 \cdot 2 = \left(\left(2^a\right)^b\right)^2 \cdot 2 = \left(5^b\right)^2 \cdot 2 = 7^2 \cdot 2 = 49 \cdot 2 = 98.$$