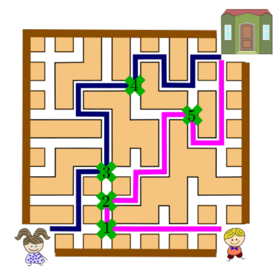
Soluciones del Examen Canguro Matemático Mexicano 2022

Nivel Estudiante

1. **(d)**. La longitud del círculo pequeño es 2π. El arco A mide $\frac{3}{8} \cdot 4\pi = \frac{3\pi}{2}$, el arco B mide $\frac{2}{8} \cdot 6\pi = \frac{3\pi}{2}$, el arco C mide $\frac{1}{8} \cdot 6\pi = \frac{3\pi}{4}$, el arco D mide $\frac{2}{8} \cdot 8\pi = 2\pi$ y el arco E mide $\frac{3}{8} \cdot 8\pi = 3\pi$.

2. **(a)**. En la figura se han puesto cruces numeradas sucesivamente en los puntos por donde deben pasar los caminos de ambos, para que se cumpla la condición de que no se cruzan. Además se ha completado un posible camino de Leo (de hecho, es la única posibilidad si Leo no pasa dos veces por un mismo punto).

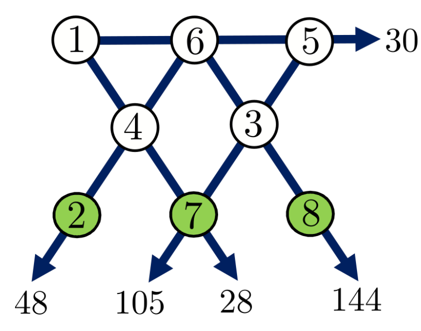


3. **(c)**. La única forma de que el equipo clasificado en segundo lugar el año pasado no llegue a la final es si le toca en el mismo grupo inicial que el clasificado en primer lugar.

4. **(e)**. Dos números distintos de 0 tienen el mismo signo si, y sólo si, su producto es positivo. Aquí el producto es $-6a^7b^8c^{-2}$. Podemos ignorar los términos elevados a potencias pares así que necesitamos que $-6a^7 > 0$, lo cual ocurre si, y sólo si, $a < 0$.

5. **(c)**. El peso total es $1+2+\cdots+12 = 78\,\text{Kg}$, así que el tercer grupo pesa $78-(26-41) = 11$. La única forma de lograr 11 es con 1, 2, 3, y 5; también la única forma de lograr 41 es como $41 = 12 + 11 + 10 + 8$. Entonces los pesos restantes (que suman 26) son 4, 6, 7 y 9.

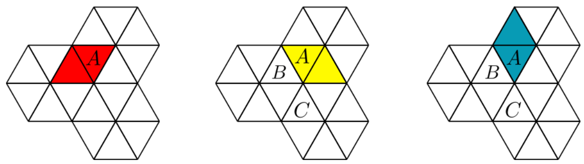
6. **(c)**. Dado que 30 y 105 son múltiplos de 5, tenemos que el 5 debe escribirse en la intersección de las líneas que marcan esas dos flechas. Análogamente, el 7 debe escribirse en la intersección de las líneas que marcan las flechas con 28 y 105. El número faltante en la línea del 105 debe ser el 3. Como 30 y 48 son múltiplos de 3, pero 3 no está escrito en esas líneas, 6 debe escribirse en la intersección de las líneas marcadas por esas flechas. Esto obliga la posición del 1 y, en consecuencia, la del 4 y la del 2. El esquema queda de la siguiente forma:



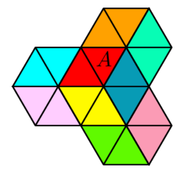
7. **(a)**. Sin pérdida de generalidad supongamos que $A = 0$. Entonces $C = 12$ y si $b = AB$, entonces $D = 18 + b$. Los puntos medios son $b/2$ y $(b + 18 + 12)/2$. La distancia es

$$\frac{b + 18 + 12}{2} - \frac{b}{2} = 15.$$

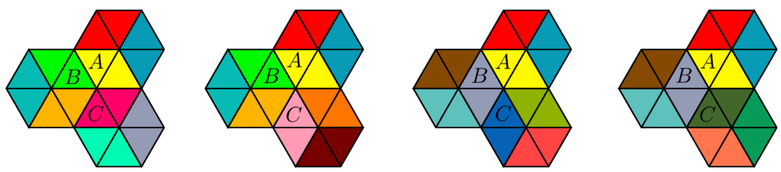
8. **(d)**. Hay 3 formas de cubrir el triángulo marcado con la letra A:



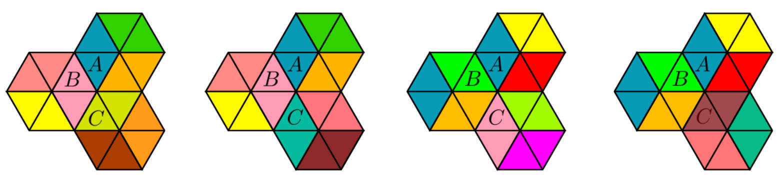
La de la izquierda sólo puede completarse de una manera.



En la segunda forma, hay dos formas de cubrir el triángulo marcado con B y cada una tiene dos formas de completarse de acuerdo a la elección de la cubierta del triángulo C.



De la misma manera, para la tercera elección de la cubierta de A, hay dos formas de cubrir el triángulo marcado con B y cada una tiene dos formas de completarse de acuerdo a la elección de la cubierta del triángulo C.



9. **(d)**. Digamos que el otro lado de cada rectangulito es a. Entonces el lado pequeño del rectángulo original es $9a$, el lado más grande del rectángulo original es 9 y de aquí que cada rectángulo mediano tiene lado menor 4. La semejanza entre los pequeños y los medianos nos dice que

$$\frac{1}{a} = \frac{9a}{4},$$

de donde $9a^2 = 4$ y así $3a = 2$. El perímetro es $2(6 + 9) = 30$.

10. **(d)**. Primera forma. Digamos que el número de oficiales es o, el número de suboficiales es s y el número de cabos es c. Buscamos el valor de $o+s+c$, y la información que tenemos es que: $200 = 5o+3s+1c$ y $600 = 10o+8s+6c$. Al restar la primera ecuación de la segunda, obtenemos $400 = 5o+5s+5c$, de donde $o+s+c = 400/5 = 80$.

Segunda forma. Notamos que cada pirata recibió 5 monedas de plata más que de oro, así que si el número de piratas $\dfrac{600-200}{5} = 80$.

11. **(e)**. Notamos que $WUSV$ es un trapecio con base menor UW, que mide 30, base mayor SV y altura SU, que también mide 30. Además sabemos que el área del trapecio es la tercera parte del área del cuadrado, que es 3600. Entonces

$$1200 = \frac{(|UW|+|SV|)\,|SU|}{2} = \frac{(30+|SV|)\;30}{2}.$$

Entonces $80 = 30+|SV|$, de donde $|SV| = 50$.

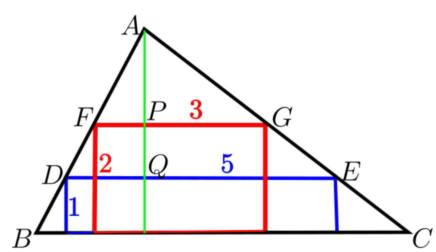
12. **(a)**. Digamos que los radios de los círculos con centros A, B, C, D y E son a, b, c, d y e, respectivamante. Así $a+b = 16$, $b+c = 14$, $c+d = 17$, $d+e = 13$ y $e+a = 14$. Sumando estas 5 ecuaciones obtenemos $2(a+b+c+d+e) = 74$, de donde $a+b+c+d+e = 37$. Pero los dos lados menores del pentágono son BC y DE y de aquí que $a = (a+b+c+d+e)-(b+c)-(d+e) = 37-14-13 = 10$ es el mayor de los radios.

13. **(e)**. Tenemos que

$$\begin{aligned} & 2^{2021}+2^{2022} = 2^{2021}\,(1+2) = 2^{2021}\times 3 \\ \text{y}\quad & 3^{2021}+3^{2022} = 3^{2021}\,(1+3) = 3^{2021}\times 4. \end{aligned}$$

Entonces el máximo común divisor es $3\times 4 = 12$.

14. **(b)**. Consideremos los puntos D, E, F, G, P y Q que se muestran en la figura y sea h la altura en A. Como los triángulos AFG y ADE son semejantes, tenemos que $\dfrac{AP}{FG} = \dfrac{AQ}{DE}$, así que $\dfrac{h-2}{3} = \dfrac{h-1}{5}$. Entonces $5h-10 = 3h-3$, de donde $h = \dfrac{7}{2}$.



15. **(b)**. Sean O el centro de la figura, A y B centros de dos círculos consecutivos (ver la figura).

Por simetría, el triángulo OAB es equilátero. Sea r el radio de los círculos. Entonces, como $|AB| = 2r$, tenemos que $|AO| = 2r$, por lo tanto las alturas de los triángulos que forman el hexágono pequeño miden r. Pero entonces la altura de los triángulos que forman el hexágono grande miden $3r$ y de aquí que los hexágonos tienen sus longitudes en razón $1:3$, por lo que el área buscada es $3^2 = 9$.