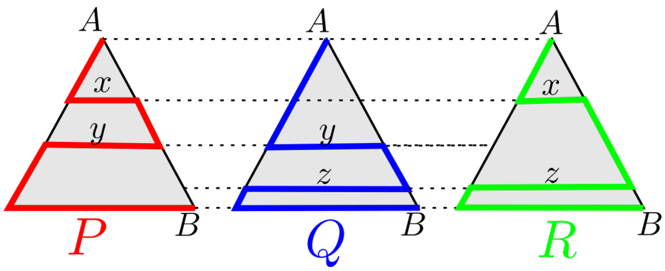
Soluciones del Examen Canguro Matemático Mexicano 2021
Nivel Estudiante

1. **(b)**. Las partes en los lados de los triángulos son todas iguales a la longitud de dos lados, así que basta comparar sólo las partes internas x, y y z, marcadas en la figura, y entonces es claro que mientras más abajo están las líneas, la longitud es mayor: $x < y < z$.



2. **(c)**. La suma del perímetro del cuadrado con la del perímetro de $ABCD$ es la misma que la del rectángulo original, es decir, $30\,\text{cm}$. Como el perímetro del cuadrado es $4 \times 3 = 12\,\text{cm}$, entonces el perímetro de $ABCD$ es $30 - 12 = 18\,\text{cm}$.

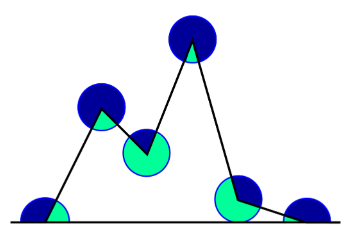
3. **(a)**. Notamos que cualquier cuadrícula de 2×2 que se escoja abarca el cuadro central, de manera que al final hubo 47 operaciones. También notamos que el cuadro central superior (el que lleva 18) se escogió exactamente cuando se escogió cualquiera de los dos de las esquinas superiores, así que el número de elecciones de los cuadros superiores fue 18. Entonces los dos cuadros inferiores de 2×2 se eligieron $47 - 18 = 29$ veces, pero, como el inferior izquierdo se escogió 13 veces, el inferior derecho (que lleva x) debe haberse escogido $29 - 13 = 16$ veces.

4. **(d)**. La pregunta es equivalente a cuántos enteros hay en el intervalo $(-\sqrt{21}, \sqrt{21})$. Como $4 < \sqrt{21} < 5$, los enteros son $-4, -3, -2, -1.0, 1, 2, 34$.

5. **9.** Tenemos que $\angle ACB = 90°$, así que en el triángulo ACB, $\angle CAB = 90° - 67° = 23°$. Por otro lado, el triángulo AOC es isósceles, así que $\angle ACO = \angle CAO = 23°$. También el triángulo COD es isósceles, así que $\angle OCD = \angle ODC = 32°$. De aquí ya concluimos que

$$\angle ACD = \angle OCD - \angle ACO = 32° - 23° = 9°.$$

6. **(c)**. Al completar los ángulos, como se muestra en la figura, la suma es $4 \times 360° + 2 \times 180° = 10 \times 180°$. Sin embargo, los ángulos agregados son los interiores a un polígono de 6 lados, así que su suma es $4 \times 180°$, de manera que la suma buscada es $(10-4) \times 180° = 6 \times 180° = 1080°$.



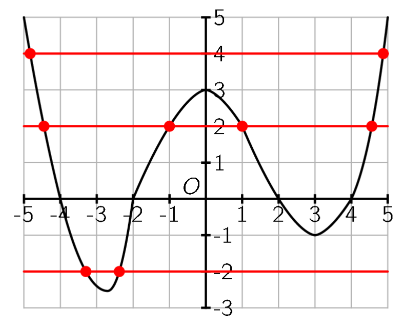
7. **(d)**. La proporción del área sombreada en cada cuadrado es una constante, independiente de la dimensión del cuadrado, pues si el círculo tiene radio r, el cuadrado tiene lado $2r$ y la proporción de áreas es

$$\frac{\pi \cdot r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Esta misma proporción se guarda, así que el área sombreada es $\pi/4$.

8. **(e)**. A incremento constante de x, y disminuye cada vez más rápido.

9. **(e)**. El que $f(f(x)) = 0$ significa que $f(x)$ es raíz de f, o sea que $f(x) = -4$, $f(x) = -2$, $f(x) = 2$ o $f(x) = 4$. La ecuación $f(x) = -4$ no tiene raíces porque la recta con ecuación $y = -4$ no corta a la gráfica. La ecuación $f(x) = -2$ tiene dos raíces porque la recta con ecuación $y = -2$ corta a la gráfica dos veces (en $x = -3$ y en $x \approx -2.5$). La ecuación $f(x) = 2$ tiene 4 raíces en $x \approx -4.5$, $x = -1$, $x = 1$ y $x \approx 4.5$. Finalmente la ecuación $f(x) = 4$ tiene dos raíces: en $x \approx -4.8$ y $x \approx 4.8$. En total el número de soluciones es $2 + 4 + 2 = 8$.



10. **(e)**. Escribiendo $y = 1$ en la condición $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ tenemos que para toda x, $f(x + 1) = f(x) \cdot f(1) = 2\,f(x)$, de donde $\dfrac{f(x+1)}{f(x)} = 2$.

Entonces, sustituyendo $x = 1, 2, 3, \ldots, 2020$ tenemos

$$\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \cdots + \frac{f(2021)}{f(2020)} = 2 \times 2020 = 4040.$$

11. **(b)**. Cada cuadrado comparte lado con 2 pentágonos, así que el número de cuadrados es $\frac{12\times 5}{2} = 30$. También, al lado de cada cuadrado hay 2 triángulos y cada triángulo comparte lado con 3 cuadrados, de manera que el número de triángulos es $\frac{30\times 2}{3} = 20$. El número buscado es $12 \times 5 + 4 \times 30 + 3 \times 20 = 240$. (Nota: Observamos que este número cuenta también el doble del número de aristas porque cada arista pertenece a dos caras.)

12. **(a)**. Consideremos los puntos D, E y F como se muestra en la figura, y sean x el área de ADE y y el área de ADF. A partir de los triángulos de área 3, tenemos que $BD = DF$, de manera que $x + 1 = y$. Análogamente, como el área de BDC es el triple que el área de BDE, tenemos que $DC = 3DE$, y entonces $3x = y + 3$. Resolvemos entonces el sistema: $3x = y + 3 = (x + 1) + 3 = x + 4$ y entonces $2x = 4$, de donde $x = 2$ y así $y = x + 1 = 2 + 1 = 3$. El área de ABC es $1 + 3 + 3 + 2 + 3 = 12$.