Soluciones del Examen Canguro Matemático Mexicano 2019

Nivel Estudiante

1. **(d)** Como pesa 400 g cuando está lleno y 100 g cuando está vacío, deducimos que el líquido total pesa 300 g. Entonces la mitad del líquido pesa 150 g que, agregados al peso del recipiente nos dan 250 g.

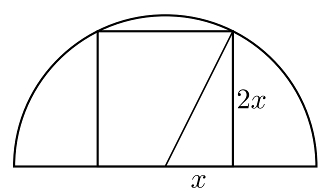
2. **(c)** Dividamos el cubo grande en capas: la de enfrente, la central y la de atrás. En la capa de enfrente se quitó sólo un cubo y lo mismo en la capa de atrás; en la segunda capa se quitaron 5 cubitos (pues sólo quedaron los de las esquinas de ese nivel). Quedaron $27 - 1 - 5 - 1 = 20$ cubitos.

3. **(c)** Como el número total de animales es de 30 y al final hay el mismo número de cada tipo, entonces al final hay 10 gatos. Por otro lado, sabemos que el número de gatos primero incrementa en 6 y luego se reduce en 5, de manera que al final queda sólo uno más que al principio, es decir, el número de gatos al principio era de 9.

4. **(e)** Salvo en la figura de (e), el área sombreada en todas las demás figuras está formada por triangulitos que van de un lado del rectángulo al lado opuesto, así que en ellas el área sombreada es, a lo más, la mitad del área del rectángulo (en (d) es un poco menos de la mitad; en (a), (b) y (c) es exactamente la mitad). En (e), en vista de que una parte sobreada comprende un rectangulito y éste, junto con los triángulitos, completan una base del rectángulo, el área sombreada es mayor.

5. **(c)** La suma de los 7 dígitos es $3a + 4b$. El número de dos dígitos $\overline{ab}$ se puede escribir como $10a + b$. Entonces tenemos que $3a + 4b = 10a + b$, de donde $3b = 7a$. Como a y b son dígitos, entonces $a = 3$ y $b = 7$, de donde $a + b = 10$.

6. **(a)** Digamos que el lado del cuadrado mide $2x$, de manera que la distancia del centro del semicírculo a un vértice del cuadrado es x, como se muestra en la figura. Por el teorema de Pitágoras tenemos que $x^2 + (2x)^2 = 1^2$, así que $5x^2 = 1$ y el área del cuadrado es $4x^2 = \dfrac{4}{5}$.

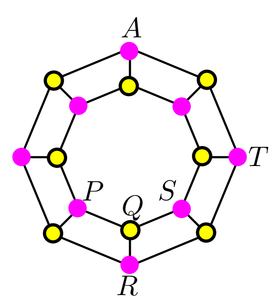


7. **(d)** Tenemos

$$7! + 8! + 9! = 7!\,(1 + 8 + 8 \cdot 9) = 7!\,(81).$$

En 7! aparecen dos $3'$s (uno en 3 y otro en 6) y $81 = 3^4$, así que 3^6 es la respuesta.

8. **(b)** Coloreemos los vértices de la figura con dos colores de forma tal que vértices sobre un mismo segmento tengan distinto color, como se muestra en la figura. Notamos entonces que todo camino alterna colores y, como 2019 es impar y el camino inicia en A, entonces sólo puede terminar en un vértice con distinto color que A, así que la única posibilidad es Q. Para ver que sí es posible llegar en 2019 pasos hay muchas posibilidades; una de ellas es llegar de A a Q directamente en 5 pasos y después moverse de Q a S alternadamente hasta completar los 2019 movimientos.

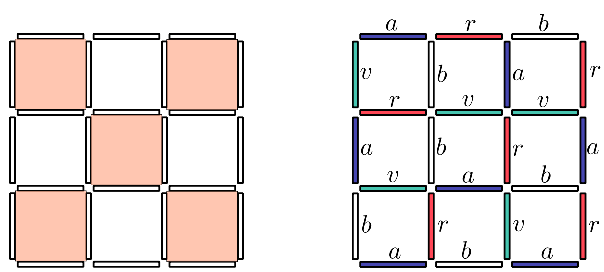


9. **(e)** Digamos que los lados del recipiente miden a, b y c metros. Entonces $2ab = 3bc = 5ac = 120$, así que $ab = 60$, $bc = 40$ y $ac = 24$. Multiplicando las tres igualdades obtenemos $(abc)^2 = 24^2 \cdot 10^2$, de donde $abc = 240$.

10. **(a)** *Primera forma.* Para que Sofía gane en el segundo turno, en el primero Arturo debe haber fallado (la probabilidad de esto es $\frac{4}{5}$) y después ella debe haber acertado (con probabilidad $\frac{1}{4}$). Entonces, para ganar en el segundo turno la probabilidad es $\dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{5}$. Análogamente, para ganar en el cuarto turno la probabilidad es $\dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{5}$. En total, la probabilidad de que Sofía gane es $\dfrac{2}{5}$.

Segunda forma. Llamemos R a las pelotas rojas y V a la verde. y consideremos todas las formas de ordenar las pelotas: $VRRRR$, $RVRRR$, $RRVRR$, $RRRVR$, $RRRRV$. En el segundo y el cuarto órdenes de los 5 que hay es cuando Sofía gana. (*Nota:* Podríamos pensar que el orden entre sí de las pelotas rojas es importante, pero entonces tendríamos igualmente que dividir entre todos los órdenes, es decir, la respuesta escrita así sería: $\dfrac{2 \cdot 4!}{5!}$.)

11. **(b)** Observemos que los cuadros sombreados en la figura de la izquierda son 5 y no comparten ningún lado, así que al menos se necesitan 5 palitos verdes. En la figura de la derecha se muestra un acomodo con 5 palitos verdes que cumple las condiciones, así que le mínimo es, efectivamente, 5.



12. **(d)** Digamos que las cantidades de personas en los 5 primeros vagones son a, b, c, d y e, en ese orden. Como $a + b + c + d + e = 199$ pero también del segundo vagón al sexto hay en total 199 personas, el sexto vagón tiene a personas. De la misma manera deducimos que el séptimo tiene b personas y así sucesivamente, como se muestra en el esquema.

a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c

Ahora, entre los 15 primeros vagones hay $3 \cdot 199 = 597$ personas, así que en los tres últimos hay $700 - 597 = 103$ personas, es decir, $a + b + c = 103$ y entonces $d + e = 199 - 103 = 96$, y ésta es la cantidad de personas en los dos vagones centrales.

13. **(c)** Tenemos que $6 = n - (n-6)$ y, como $n-6$ es divisor de n y de sí mismo, tenemos que $n-6$ es divisor de 6. Entonces las posibilidades para $n-6$ son 1, 2, 3 y 6; de donde las posibilidades para n son 7, 8, 9 y 12. Ahora revisamos en cada una de éstas si $n-6$ es el mayor divisor de n, lo cual sólo ocurre para 7, 9 y 12.

14. **(a)** Sabemos que $4 < \sqrt{20} < 5$, así que $24 < 20 + \sqrt{20} < 25$, de donde $4 < \sqrt{24} < \sqrt{20+\sqrt{20}} < \sqrt{25} = 5$, es decir, $4 < \sqrt{20+\sqrt{20}} < 5$ Repitiendo esto obtenemos que el mayor entero menor o igual que la expresión dada es 4.

15. **(e)** Construyamos el rectángulo $BFEG$ como se muestra. Entonces la diagonal del cuadrado $ABCD$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo BDG así que, por el teorema de Pitágoras, $DF = \sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{50}$. Otra vez, por el teorema de Pitágoras, si llamamos x al lado del cuadrado, tenemos que $x^2 + x^2 = 50$, de donde $x = 5$.