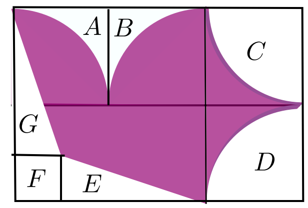
Soluciones del Examen Canguro Matemático 2018

Nivel Estudiante

1. **(a)** Como el jueves es 2, también caen en jueves los días $2+7=9$, $2+14=16$, $2+21=23$ y $2+28=30$. El 27 cae en lunes.

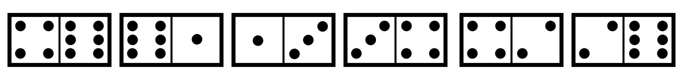
2. **(a)** En la figura, las regiones A y C tienen juntas la misma área que 4 cuadritos. Lo mismo pasa con las regiones B y D. Las regiones G y E, juntas, tienen la misma área que 3 cuadritos. Así, el área que no está sombreada es igual al área de $4+4+3+1=12$ cuadritos. Luego, el área sombreada debe ser igual al área de $24-12=12$ cuadritos. Así, el rectángulo tiene el doble de área que la región sombreada, es decir, $384\,\mathrm{cm}^2$.



3. **(c)** Los únicos puntos que aparecen una cantidad impar de veces son 4 y 6, así que esos deben ser los extremos de la cadena de fichas. Así, las fichas que tienen 1 punto deben ir juntas, pero acomodarlas requiere dos movimientos cuando menos, que no son suficientes para arreglar toda la cadena. Entonces se necesitan cuando menos tres movimientos para arreglar la cadena de fichas.

Es posible arreglar la secuencia intercambiando primero la ficha que tiene 4 y 2 puntos con la ficha que tiene 6 y 1, después la ficha que tiene 3 y 1 puntos con la que tiene 6 y 1 y, finalmente invirtiendo la ficha que tiene 3 y 1 puntos.

En el dibujo se muestra cómo quedan las fichas después de estos movimientos.



4. **(b)** Forzosamente en cada uno de las subcuadrículas de 2×2 de las esquinas debe haber al menos un 0, sí que la máxima suma es menor o igual que 21. Vemos que sí es posible lograr 21 como suma en la configuración mostrada a la derecha.

1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

5. **(d)** Analicemos las distintas posibilidades de acuerdo a si A gana, empata o pierde.

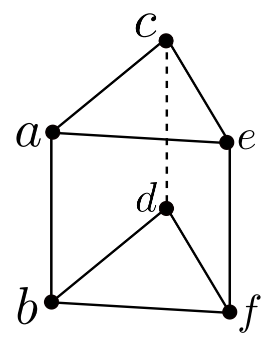
Si A gana, entonces son seguro ciertas (i), (ii), (iii) y (iv), de manera que no es posible esto.

Si A empata, las únicas que pueden ser ciertas son (ii) y (iv), de manera que tampoco es posible.

La conclusión es que A pierde. Como sabemos que 3 afirmaciones son ciertas, entonces éstas son (i), (ii) y (v). Entonces se anotaron 3 goles y, como A perdió pero sí anotó, el resultado fue 1-2.

6. **(e)** Juntos gastaron $15\,\% + 100\,\% + 160\,\% = 275\,\%$ de lo que gastó Joaquín. Así, Joaquín gastó $\frac{5{,}500\times 100}{275} = 2,000$. Como Armando gastó el $60\,\%$ más, gastó \$3,200.

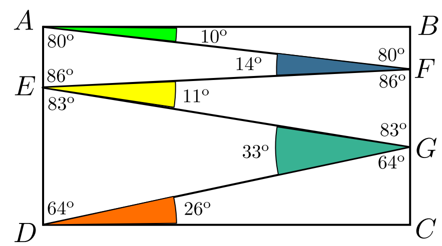
7. **(a)** Supongamos que un reordenamiento de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 que funciona está dado por a, b, c, d, e, f como se muestra en la figura de la izquierda abajo (sabemos que $d = 5$). Entonces $a+b+c+d = c+d+e+f$, de donde $a+b = e+f$. De la misma manera tenemos que este valor también coincide con $c+d$. Pero $a+b+c+d+e+f = 1+2+3+4+5+6 = 21$, así que $a+b = c+d = e+f = 7$, y de aquí que $c = 2$. Un acomodo que funciona aparece en la figura de la derecha.



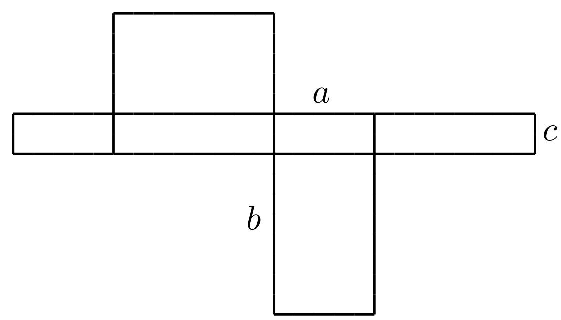
8. **(e)** Podemos escribir los números como $\frac{10^{2018}}{5} - 2$, $\frac{10^{2018}}{5} - 1$, $\frac{10^{2018}}{5}$. $\frac{10^{2018}}{5} + 1$ $\frac{10^{2018}}{5} + 2$. El de enmedio es

$$\frac{10^{2018}}{5} = 2 \cdot \frac{10^{2018}}{2 \cdot 5} = 2 \cdot 10^{2017}.$$

9. **(d)** Como el ángulo DAB es recto, el ángulo EAF mide $90^{\circ} - 10^{\circ} = 80^{\circ}$. Fijándonos en el triángulo AFE, tenemos que el ángulo AEF mide $180^{\circ} - 14^{\circ} - 80^{\circ} = 86^{\circ}$. Como el ángulo ADC es recto, el ángulo EDG mide $90^{\circ} - 26^{\circ} = 64^{\circ}$. Ahora, en el triángulo EGD tenemos que el ángulo DEG mide $180^{\circ} - 33^{\circ} - 64^{\circ} = 83^{\circ}$. Luego, el ángulo FEG mide $180^{\circ} - 86^{\circ} - 83^{\circ} = 11^{\circ}$.

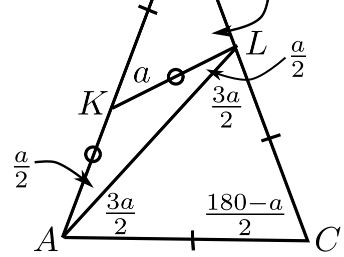


10. **(c)** Llamemos a, b y c a las dimensiones de la caja, según se muestra en el dibujo. Tenemos que $2a + 2b = 26$, así que $a + b = 13$. Tenemos también que $10 + 7 = (b + c) + (c + a) = 13 + 2c$, de donde $c = 2$. Luego, $b = 10 - 2 = 8$, $a = 7 - 2 = 5$ y el volumen de la caja es $8 \times 5 \times 2 = 80$ cm^3.



11. **(c)** Llamemos a a la medida del ángulo ABC. Como $BL = LK$ tenemos que BKL mide a, BLK mide $180 - 2a$ y LKA mide $180^{\circ} - a$. Tracemos el segmento LA. Como la suma de los ángulos del triángulo AKL es 180°, el ángulo KAL mide $\frac{a}{2}$, al igual que el ángulo KLA (pues $KL = KA$).

Restando a 180° las medidas de los ángulos BLK y KLA, se obtiene que ALC mide $\frac{3a}{2}$. Como $AB = BC$, tenemos que $LC = BK = AC$ y, por tanto, el ángulo LAC mide también $\frac{3a}{2}$. Como la suma de los ángulos del triángulo LAC es 180°, el ángulo



LCA mide $180 - 3a$.

Finalmente, dado que $a+(\frac{a}{2}+\frac{3a}{2})+180-3a = 180^{\text{o}}$, obtenemos que $a = 36^{\text{o}}$.

12. **(a)** Como $\frac{360}{5} = 72$, cada vez que el pentágono gira un múltiplo de 72^{o}, queda empalmado en el hoyo. Veamos cuál es el primer número entero $k > 0$ para el que $21k$ es múltiplo de 72. Como $21 = 3 \times 7$ y $72 = 2^3 \times 3^2$, ese número es $k = 2^3 \times 3 = 24$. Entonces se necesitan 24 pasos para que el pentágono vuelva a empalmar con el hoyo. Ahora necesitamos saber dónde queda el vértice superior del pentágono a los 24 pasos, es decir, necesitamos saber cuál es el entero r tal que $72r = 21 \times 24$. Esta ecuación la reescribimos como $2^3 \times 3^2 r = 3 \times 7 \times 3 \times 2^3$ y, cancelando, $r = 7$. Entonces el vértice queda girado 2 veces 72^{o} es decir, en la posición (a).