Soluciones del Examen Canguro Matemático Mexicano 2009, Nivel Estudiante.

1. **(d)** El primer cuadrado está dividido en 9, el segundo en 4 y el tercero en 25, así que el área es $\frac{1}{4 \cdot 25 \cdot 9}$.

2. **(e)** En una semana completa leyó $25 + 6 \cdot 4 = 49$. Como $290 = 49 \cdot 5 + 45$, y $45 = 25 + 5 \cdot 4$ entonces le tomó 5 semanas completas +6 días, es decir 41 días.

3. **(c)** El tamaño de la caja es de $30 \cdot 30 \cdot 50 = 45\,000 = 45 \cdot 10^3$; entonces el número cúbico mayor que es factor de éste es 10^3 y por lo menos se necesitan 45 cubos. Sí es posible con 45 cubos de $10 \times 10 \times 10$ pues las longitudes de los lados son múltiplos de 10.

4. **(e)** Llamemos x al número de personas que le ganaron a Juan. Entonces $x + 1 + 3x = 2009$, de donde $x = 502$.

5. **(a)** Cada número del 0 al 6 aparece 8 veces (pues aparece con cada uno de los otros 7 y una de ellas es igual a él mismo). Entonces la suma es $8(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 8 \cdot 21 = 168$.

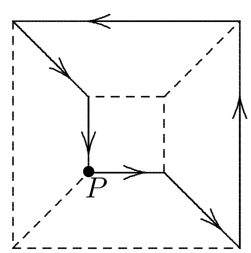
6. **(d)** Observemos que si los números del primer renglón son (a, b), entonces en el siguientes renglones son: $(a + b, a - b)$, $(2a, 2b)$, $(2(a + b), 2(a - b))$, $(4a, 4b)$, $(4(a + b), 4(a - b))$ y $(8a, 8b)$. Entonces $a = \frac{96}{8} = 12$ y $b = \frac{64}{8} = 8$.

7. **(c)** Digamos que el peso que puede soportar el elevador es P. Entonces cada adulto debe pesar, en promedio, $\frac{P}{12}$ y cada niño, $\frac{P}{20}$. Tenemos que resolver

$$9 \cdot \frac{P}{12} + x \cdot \frac{P}{20} \leq P.$$

Multiplicando la ecuación por $\frac{60}{P}$, tenemos $9 \cdot 5 + 3x \leq 60$, de donde $x = 5$.

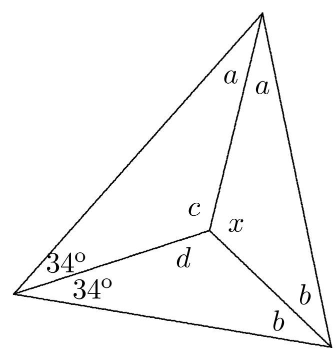
8. **(c)** Observemos que cada arista es parte de dos cuadrados y que el movimiento hace que cuando la hormiga ha recorrido exactamente dos aristas de un mismo cuadrado, la siguiente arista que toma es en el otro cuadrado distinto. Entonces el movimiento es como se indica en el cubo "aplanado" de la figura.



9. **(b)** Llamemos a, b, c y d a los ángulos marcados en la figura. Tenemos que

$$x = 360^o - (c+d) = 360^o - (180^o - (34^o + a)) - (180^o - (34^o + b)) = 68^o + (a+b).$$

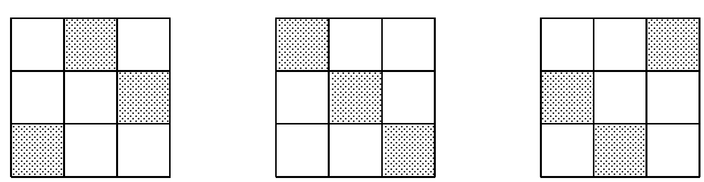
Por otro lado, $2a + 2b + 68^o = 180^o$, así que $a + b = 56^o$, de donde $x = 68^o + 56^o = 124^o$.



10. **(a)** Tenemos que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes. Entonces, para que el área de $A'B'C'$ sea 5 veces el área de ABC, las longitudes de los lados de $A'B'C'$ deben ser $\sqrt{5}$ veces las de ABC. Además también los triángulos OAB y $OA'B'$ son semejantes y así A' tiene coordenadas $(10\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$.

11. **(c)** El número n debe de cumplir que $9 < \sqrt{n} < 11$, así que $81 < n < 121$; de esta manera $82 \leq n \leq 120$ y la cantidad de enteros es $120 - 81 = 39$.

12. **(b)** Hay 9 filas de cubos en cada una de las tres direcciones; es decir, es necesario tapar 27 direcciones. Como cada cubito tapa 3 direcciones, al menos se necesitan 9. Veamos que un acomodo con 9 es posible. En el siguiente esquema ponemos tres cuadrículas de 3×3, cada una de ellas representando un "piso" del cubo de $3 \times 3 \times 3$, y sombreamos el lugar donde se puede ponerse un cubo de manera que se tapen todas las direcciones en el cubo grande. Como el esquema contiene 9 cuadritos sombreados, entonces 9 es precisamente el mínimo.

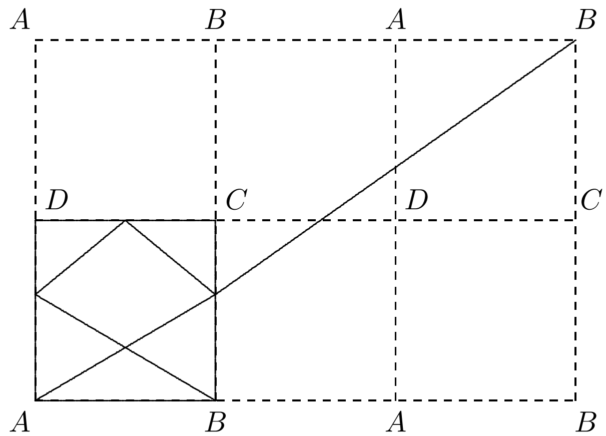


13. **(a)** Multipliquemos cada número $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ por $1 = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. Entonces los números dados son

(a) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}$ (e) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$

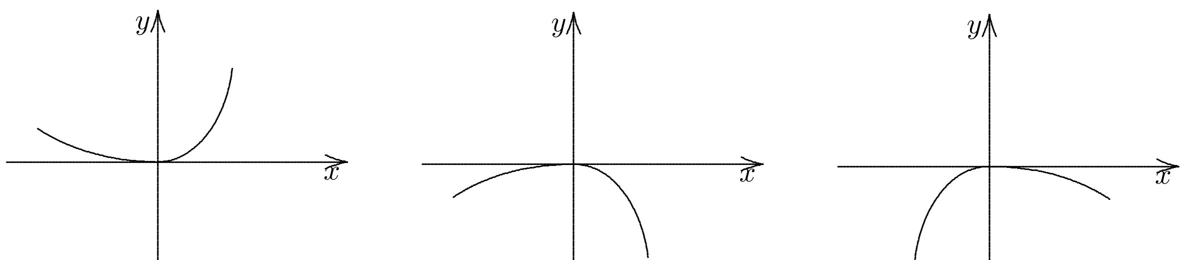
Es claro que los denominadores van creciendo, así que los cocientes van decreciendo.

14. **(b)** Pensemos que las paredes son espejos. Entonces la trayectoria de la bola se refleja en una línea recta como se muestra en la figura



Por Pitágoras la longitud es $\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}$.

15. **(d)** A continuación se muestran las curvas de las ecuaciones dadas. Entonces $g(x)=-f(-x+2)$.



$y=f(x+2)$ $\quad$ $y=-f(x+2)$ $\quad$ $y=-f(-x+2)$