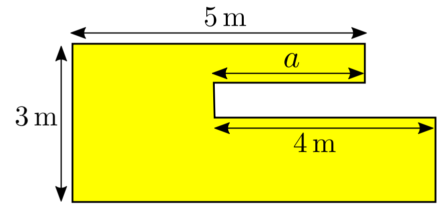
Soluciones del Examen Canguro Matemático Mexicano 2020

Nivel Cadete

1. **(d)** Notemos primero que la cantidad de dulces es 8, y que en cada intercambio se duplicó la cantidad de dulces del receptor. Entonces, después del primer intercambio Juan tenía $4/2 = 2$, así que Olivia tenía $8 - 2 = 6$. Al principio Olivia tenía $6/2 = 3$ dulces y Juan tenía $8 - 3 = 5$.

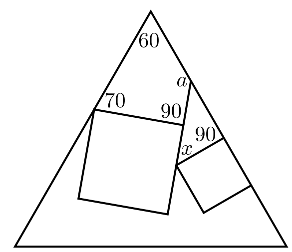
2. **(b)** Como a y b son menores que 1, su producto es menor que ellos; los únicos que cumplen esto son p y q. Por otro lado, ambos son mayores a $1/2$, así que su producto es mayor a $1/4$ y entonces es claro que debe ser q.

3. **(c)** Las partes verticales del lado derecho miden en total lo mismo que el izquierdo: 3. Por otro lado, si llamamos a al lado horizontal que se indica en la figura, tenemos que la parte horizontal de abajo mide $5 + 4 - a$. El perímetro es $3 + 3 + 5 + a + 4 + 5 + 4 - a = 24$.



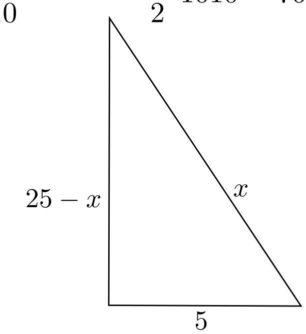
4. **(c)** Lo más que puede haber opuesto al 4 es el 9, y la suma de estas dos caras sería 13; análogamente, lo menos que puede haber opuesto al 8 es el 1, y esa suma sería 9. Entonces las posibles sumas van del 9 al 13. Sin embargo, para que opuesto al 5 la suma fuera 9, debería haber un 4 que ya está usado y, de la misma manera, para que la suma con 5 fuera 13, el número opuesto al 5 debería ser el 8 que ya está usado. Tampoco es posible que la suma con 5 sea 10, pues debería usarse otra vez el 5. Entonces las posibles sumas son 11 o 12 pero no puede ser 12 porque entonces opuesto al 4 iría el 8 que ya se usó. Deducimos que la suma es 11 y entonces opuesto al 5 va el 6 (también tenemos que opuesto al 8 va el 3, y opuesto al 4 va el 7).

5. **(e)** Prolonguemos uno de los lados de uno de los cuadrados como se muestra. Como cada ángulo de un triángulo equilátero mide $60°$ y la suma de los ángulos de un cuadrilátero es $360°$, el ángulo marcado con a mide $140°$ así que $x + 90° = 140°$, de donde $x = 50°$.



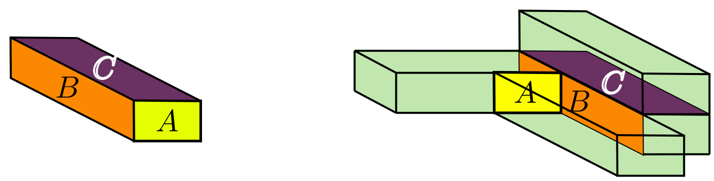
6. **(e)** Es igual a $\dfrac{1010^2 + 2^2 \cdot 1010^2 + 3^2 \cdot 1010^2}{2 \cdot 1010} = \dfrac{(1 + 2^2 + 3^2) \cdot 1010^2}{2 \cdot 1010} = \dfrac{14}{2} 1010 = 7070.$

7. **(a)** Llamemos x a la distancia buscada. Como la liebre corre 5 veces más rápido que la tortuga, la liebre recorrió 25 Km y tenemos la figura que se muestra. Por el teorema de Pitágoras, $x^2 = (25 - x)^2 + 5^2$, de donde $x^2 = 25^2 - 50x + x^2 + 25$, así que $50x = 25(25 + 1)$ y entonces $x = 13$.

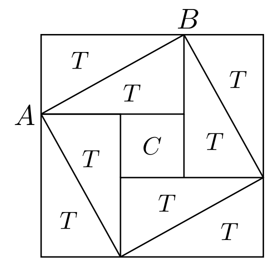


8. **(a)** Notemos que cada 8 posiciones debe repetirse el 10; esto es porque el primero junto con los 6 que le siguen suman lo mismo que esos 6 con el octavo. Pero 8 y 15 no tienen factores en común, así que al ir de 8 en 8 recorriendo, digamos, en el sentido de las manecillas del reloj, abarcamos todas las posiciones. Entonces concluimos que todos los números son iguales a 10. La única suma posible es 150, que no aparece en la lista.

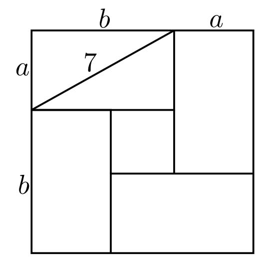
9. **(b)** Digamos que las áreas de las distintas caras de las cajas son A, B y C como se muestra en la figura a la izquierda. A los 4 litros que se necesitarían para pintar todas las cajas si estuvieran separadas hay que restarle las porciones que quedan pegadas. Notamos que es justo un par de cada tipo, como se muestra en la figura, así que la respuesta es $4-1=3$ litros.



10. **(a)** *Primera forma.* Partamos cada rectángulo a través de su diagonal, como se muestra en la figura. Llamemos T al área de cada uno de los 8 triángulos y C al área del cuadrado pequeño. Por un lado tenemos que las diagonales de los rectángulos forman un cuadrado de área $49\,\text{cm}^2$. Pero el área de este cuadrado se puede calcular de otras dos formas: $4T+C$ y $81-4T$. Al sumar las dos ecuaciones $4T+C=49$ y $81-4T=49$ obtenemos $81+C=98$, de donde $C=17$.



Segunda forma. Llamemos a y b a los lados del rectángulo, como se muestra. Por el teorema de Pitágoras tenemos que $a^2+b^2=49$. También tenemos que $a+b=9$. Si elevamos esta ecuación al cuadrado obtenemos el área del cuadrado grande: $81=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=49+2ab$, de aquí que $ab=\frac{81-49}{2}=16$. Entonces el área del cuadrado chico es $81-4ab=81-64=17$.



11. **(a)** En total hubo $\frac{10+15+17}{2}=21$ juegos. Como Alicia jugó 10 juegos, quiere decir que descansó en 11 juegos. Sabemos que ninguna descansó en dos juegos consecutivos así que la única posibilidad es que Alicia hubiera descansado en todos los juegos impares, lo cual quiere decir que jugó el segundo juego y lo perdió.

Nota: Una forma en la que se cumplen todas las condiciones se muestra en el siguiente esquema en el que se mencionan las parejas que se enfrentan en cada juego, abreviando A por Alicia, B por Bere y C por Caty.

1) (B,C)	4) (A,B)	7) (B,C)	10) (A,C)	13) (B,C)	16) (A,C)	19) (B,C)
2) (A,B)	5) (B,C)	8) (A,B)	11) (B,C)	14) (A,C)	17) (B,C)	20) (A,C)
3) (B,C)	6) (A,B)	9) (B,C)	12) (A,C)	15) (B,C)	18) (A,C)	21) (B,C)

12. **(d)** Analizamos cada una de las combinaciones si puede o no pertenecer al conjunto de figuras sin violar ninguna condición, escribiendo R por rojo y A por azul: