# Soluciones del Examen Canguro Matemático Mexicano 2019

## Nivel Cadete

1. **(b)** La única forma de lograr que las tres cantidades sean distintas y que su suma sea 7 es: $1 + 2 + 4 = 7$.

2. **(e)** En todas las opciones, salvo en (e), Armando mide menos que Diego o que Enrique. En la opción (e) todas las condiciones se cumplen.

3. **(a)** Hay 14 rectángulos que miden 2 cm de base por $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ cm de altura, así que el área de todo lo que forman los rectángulos es $14 \times 2 \times \frac{3}{2} = 42\,\text{cm}^2$. Para obtener el área sombreada, a esta cantidad hay que restarle el área del triángulo que es $30\,\text{cm}^2$.

4. **(d)** Cada 10 segundos hay un nuevo animal enfrente; 3 minutos equivale a $180 = 150 + 30$ segundos, así que estará el tercer animal después del caballo, es decir, el flamenco.

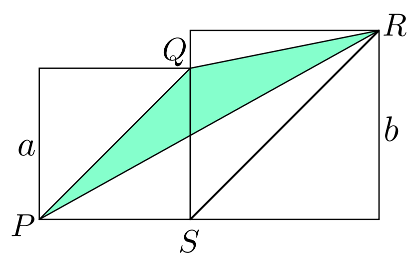
5. **(d)** Con el total de monedas: $5 + 7 + 10 = 22$ se podrían comprar 2 manzanas, 2 peras y 2 plátanos, de manera que la respuesta es la mitad: 11 monedas.

6. **(c)** Desde atrás, se ve a la izquierda lo que ahora se ve a a la derecha y viceversa. Lo que está arriba se sigue viendo arriba. Fijándonos en la parte superior notamos que (d) es la única opción.

7. **(b)** *Primera forma.* A la suma de las áreas de los cuadrados hay que restarles las áreas de los triángulos no sombreados:

$$a^2 + b^2 - \frac{1}{2}(a^2 + (b-a)b + (a+b)b) = \frac{a^2}{2}.$$

*Segunda forma.* Tracemos la diagonal $RS$ del cuadrado de lado $b$ como se muestra en la figura. Entonces vemos que los triángulos $PQR$ y $PQS$ tienen la misma área (pues tienen la misma base $PQ$ y su altura es la distancia entre las paralelas $PQ$ y $SR$). El área de $PQS$ es claramente la mitad del área del cuadrado de lado $a$.




8. **(a)** El primer premio puede darse a cualquiera de las dos personas. Después cada uno de los otros 3 premios tiene probabilidad de $\frac{1}{2}$ de entregarse a la misma persona, así que la respuesta es $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

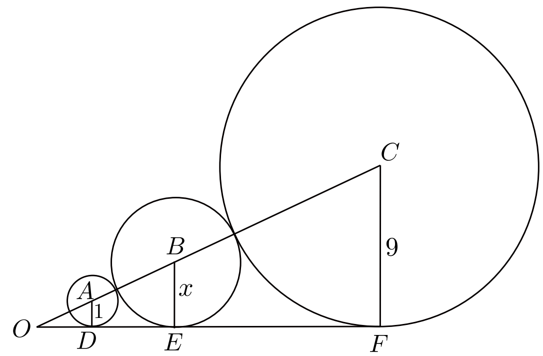
9. **(d)** Como la longitud de la cuerda es siempre la misma, cada una de las cuerdas de la polea central se acorta a la mitad, es decir, la polea central sube 12 centímetros. Análogamente la cuerda que sostiene la polea del extremo $Q$ se acorta en 12 centímetros repartidos en los dos lados, de manera que el punto $Q$ sube 6 centímetros.

10. **(c)** El 55 % de 20 es 11, así que al principio había acertado 11 veces. Como el 56 % de 25 es 14, acertó $14 - 11 = 3$ veces en esos 5 tiros.

11. **(d)** Los números divisibles entre $2^{10}$ son de la forma $2^{10}x$ para $x$ entero. Como $2^{13} = 2^{10} \cdot 2^3 = 2^{10} \cdot 8$, las posibilidades para $x$ que queremos contar son las que cumplen $1 \leq x \leq 8$.

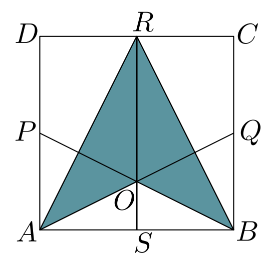
12. **(b)** Digamos que los números escogidos son $a < b < c$. Para que $b$ sea el promedio de $a$ y $c$ es necesario y suficiente que $a$ y $c$ sean ambos pares o ambos impares y entonces $b$ está determinado: $b = \dfrac{a+c}{2}$ (notando que, si $a \neq c$, entonces también $b$ es distinto de $a$ y de $c$). Entonces las posibilidades son $2 \cdot \binom{5}{2} = 2 \cdot 10 = 20$ pues hay 5 números pares y 5 impares.

13. **(a)** Consideremos la figura que se muestra. El ángulo entre las rectas es de 30º y sabemos que en un triángulo así (que es la mitad de un triángulo equilátero), la hipotenusa es el doble de uno de los catetos; en este caso, $OA = 2$ y $OC = 18$, de manera que $AC = 18 - 2 = 16$ y entonces $x = \dfrac{16-9-1}{2} \cdot \dfrac{6}{2} = 3$.




14. **(b)** Primero supongamos que las máximas potencias de un número primo $p$ que aparecen como factor de tres casillas consecutivas son $p^a$, $p^b$ y $p^c$, con $a \leq b \leq c$. Entonces, $b = \frac{a+c}{2}$; es decir, $b$ es el promedio de $a$ y $c$, o dicho de otra manera, la diferencia entre $b$ y $a$ es la misma que entre $c$ y $b$. Ahora observemos que $6 = 2 \cdot 3$ y $192 = 2^6 \cdot 3$ y entonces ya es claro que los números intermedios son $2^2 \cdot 3 = 12$, $2^3 \cdot 3 = 24$, $2^4 \cdot 3 = 48$ y $2^5 \cdot 3 = 96$.

15. **(e)** *Primera forma.* Sea $S$ el punto medio de $AB$ y sea $O$ el punto de intersección de $AQ$ con $BP$. Por simetría, $O$ está sobre $RS$. Además, los triángulos $AOS$ y $AQB$ son semejantes y sus lados están en razón $1 : 2$. Digamos que el cuadrado tiene lado 4; entonces $QB$ mide 2 y $OS$ mide 1. Ahora calculemos el área de los triángulos no sombreados. El triángulo $AOB$ tiene área $\dfrac{4 \cdot 1}{2} = 2$; ambos triángulos $ARD$ y $BRC$ tienen área $\dfrac{4 \cdot 2}{2} = 4$. Entonces el área de la parte sombreada es $16 - 2 - 4 - 4 = 6$ y la fracción buscada es $\dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$.




*Segunda forma.* El área sombreada es igual al área del triángulo $ABR$ menos el área del triángulo $AOB$, donde $O$ es la intersección de $AQ$ y $BP$. Además el triángulo $ABR$ tiene la mitad del área del cuadrado. Por otra parte, el rectángulo $ABQP$ también tiene área la mitad del área del cuadrado puesto que $P$ y $Q$ son los puntos medios de $AD$ y $BC$, respectivamente. Ahora, las diagonales del rectángulo $ABQP$ lo dividen en 4 triángulos de igual área, por lo que el área de $ABO$ es $1/4$ del área del $ABQP$ y, por lo tanto $1/8$ del área del cuadrado. Finalmente, el área sombreada es $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{8}$.